

6. MODUL

KOORDINÁTA- GEOMETRIA₁ – AZ EGYENES

Készítette: Vidra Gábor

I. Az egyenes pontjai, ábrázolása

A koordináták és a velük kapcsolatos tevékenységek átszövik a mindennapjainkat még akkor is, ha ezzel nem vagyunk tisztában. Mobiltelefonok használata, műholdas helymeghatározás, ábrák, képek, honlapok monitoron történő megjelenítése, adó-vevő antennák telepítése, csillagok tanulmányozása, robottevékenységek tervezése: mind-mind olyan feladat, amikor szükség van a koordinátákra mint a helymeghatározás vagy a mozgások leírásának legalapvetőbb eszközére. Ebben a modulban megismerjük azokat a problémákat a koordináta geometriából, amelyeket egyenesekkel tudunk megoldani.

A koordináta-rendszert tartalmazó síkot **koordinátasíknak** nevezzük. Ha kiegészítjük egy origón áthaladó, mindkét koordinátatengelyre merőleges z tengellyel (számegyenessel), akkor térbeli koordináta-rendszert kapunk. A koordináta-rendszer x tengelyét **abszcisszatengelynek**, y tengelyét **ordinátatengelynek** nevezzük.

A koordinátasíkon minden pontot egy rendezett (azaz nem felcserélhető) valós számpár jellemez. A számpár első tagját **abszcisszának**, második tagját **ordinátának** nevezzük. Ezek a pont koordinátái.

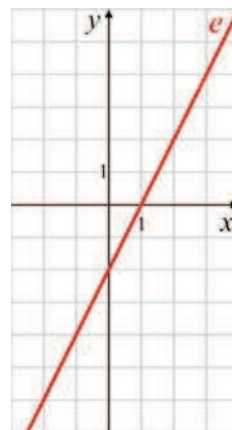
Pont (abszcissza; ordináta)

Mintapélda₁

Döntsük el, hogy a $P(1; 0)$, az $R(-3; -6)$ és az $S(20; 40)$ pont eleme-e az $e: y = 2x - 2$ egyenesnek?

Megoldás:

Aki tud egyenest ábrázolni, az a P és R pontról valószínűleg könnyen el tudja dönteni, hogy rajta van-e, vagy sem. Azonban a 40 mint koordináta általában kívül esik azon a tartományon, amit ábrázolni szoktunk, ezért találunk kell egy másik módszert az eldöntésre.



Egy pont akkor eleme egy egyenesnek, ha a pont megfelelő koordinátáit az egyenes egyenletébe behelyettesítve, az egyenes egyenlete igazgá válik.

Másképpen fogalmazva egy pont akkor van rajta az egyenesen, ha a pont koordinátái kielégítik az egyenes egyenletét.

Az $S(20; 40)$ pont koordinátáit behelyettesítve az e egyenes egyenletébe: $40 = 2 \cdot 20 - 2$ állítást kapjuk, ami nem igaz. Az S pont koordinátái nem teszik igazzá az egyenes egyenletét, ezért S nem eleme e egyenesnek. Ezzel szemben a $P(1; 0)$ pont esetében $0 = 2 \cdot 1 - 2$ valóban fennáll, vagyis $P \in e$. Hasonlóan: $R \notin e$, mert $-6 \neq 2 \cdot (-3) - 2$.

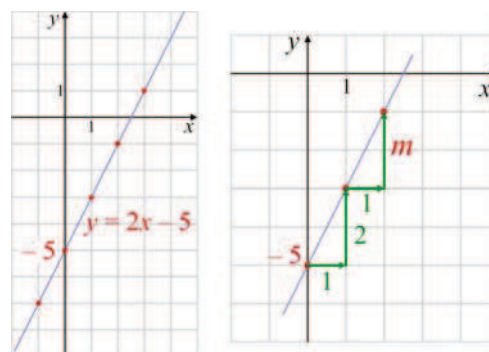
Az egyenesek grafikonjának elkészítésekor az egyenes egyenletének $y = mx + b$ alakját használtuk általános iskolában.

m jelenti a meredekséget, b pedig azt az értéket, ahol az egyenes metszi az y tengelyt.

A meredekség megmutatja, hogy ha az egyenes egyik pontjától 1 egységgel x irányba lépünk, akkor y irányba hány egységet kell lépnünk egy másik pont megjelöléséhez.

Például az $y = 2x - 5$ egyenes esetén $m = 2$, $b = -5$.

Ábrázoláskor az y tengelyen -5 értékhez bejelöljük az egyenes egy pontját. Az egyenes egy másik pontját kapjuk, ha 1-et jobbra, 2-t felfelé lépünk a meredekségnek megfelelően. Ekkor az $(1; -3)$ pontba érünk.



Megjegyzés: A koordináta-rendszerben egy egyenest úgy is ábrázolhatunk, hogy meghatározzuk két tetszőleges pontjának koordinátáit, ezeket kijelöljük és összekötjük.

Feladatok










1. Döntsd el, hogy eleme-e az e egyenesnek a P pont!

- a) $e: 2x - y = 6$, $P(5; 4)$; b) $e: x + 4y = 10$, $P(-2; 3)$;
c) $e: 3y + 2x - 5 = 0$, $P(-1; 3)$; d) $e: -3x = -y + 6$, $P(3; 14)$.

2. Válaszd ki, hogy p mely értéke mellett illeszkedik az $A(4, -2)$ pont az $e: 3x + py = 20$ egyenesre! a) 4; b) $-0,5$; c) $0,25$; d) -4 ; e) 0.

3. Válaszd ki a megadottak közül az $e: 3x - 5y = 4$ egyenes y tengellyel alkotott metszéspontját!

- a) $-\frac{4}{5}$; b) $\frac{4}{3}$; c) $\left(0; -\frac{4}{5}\right)$; d) $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$; e) $(3; 0)$.

-  4. A $P(4; 6)$ pont illeszkedik az $y = mx + 3$ egyenesre. Mennyi az egyenes meredeksége?
- a) 4; b) $-\frac{4}{3}$; c) -3 ; d) $\frac{3}{4}$; e) $-\frac{3}{4}$
-  5. Melyik értéknél metszi az $e: 3x - 2y = p$ egyenes az y tengelyt, ha az egyenes átmegy az $R(6; 7)$ ponton?
- a) 3; b) -2 ; c) $\frac{3}{2}$; d) $\frac{2}{3}$; e) 2.
-  6. Add meg az $5x + y = 12$ egyenes tengelymetszeteit (vagyis azokat az értékeket, amelyeknél az egyenes metszi a tengelyeket), és még 2-2 pontját ábrázolás nélkül!
-  7. Határozd meg az $5x - 2y = 10$ egyenes metszéspontját az x tengellyel!
-  8. Adott egy háromszög három csúcsa: $A(-9; -4)$, $B(3; 4)$ és $C(11; -4)$. Olvasd le az oldalegyeneseinek jellemző adatait, és írd fel azok az egyenleteit!
-  9. Adott egy háromszög oldalegyeneseinek egyenlete: $2y + x + 4 = 0$; $x = y - 7$; $y + 2x = 4$.
Ábrázold koordináta-rendszerben a háromszöget, add meg csúcspontjainak koordinátáit, és határozd meg a háromszög területét!
-  10. Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek meredeksége -2 , és
- a) az y tengelyt az $A(0; 3)$ pontban metszi!
b) az x tengelyt a $(4; 0)$ pontban metszi!
-  11. Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek meredeksége $0,4$, és átmegy az $(5; -1)$ ponton!
-  12. Adott egy háromszög három csúcsa: $A(-5; 2)$, $B(2; -3)$ és $C(3; 1)$.
- a) Lehet-e az $e: x = y + 1$ egyenes a háromszög egyik oldalegyenesének egyenlete?
b) Lehet-e az $f: x = 3y$ egyenes a háromszög egyik súlyvonalának egyenlete?

II. Az egyenes egyenlete

Mintapélda₂

Megadunk néhány pontot, amelyek egy-egy egyenesen vannak. Keressünk összefüggést a pontok koordinátái között!

a) $A(-2; 1), B(4; 3), C(10; 5);$

b) $A(5; 2), B(-2; 2), C(11; 2);$

c) $A(-4; 1), B(-4; 2), C(-4; -5);$

d) $A(0; 4), B(-3; 6), C(12; -4).$

Megoldás:

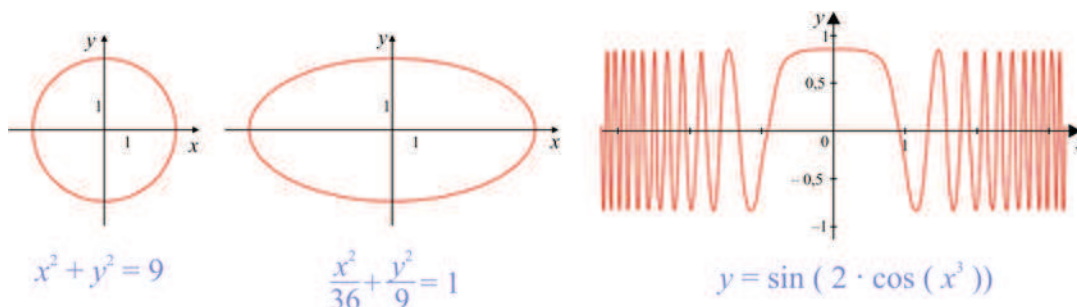
A három pont egy egyenesen fekszik. Ábrázolás után leolvashatjuk az egyenesek egyenleteit: a) $x = 3y - 5$; b) $y = 2$; c) $x = -4$; d) $2x + 3y = 12$.

A koordinátageometriában a pontokat mindig koordinátaikkal jellemezzük. Az alakzatoknak végtelen sok pontja lehet (egyenesek, körök, parabolák stb.), ezért nem lehet egy alakzatot úgy megadni, hogy a pontjait felsoroljuk. Helyette megadjuk azt, hogy milyen szabály érvényes az alakzat pontjainak koordinátáira.

Például az $e: x = 3y - 5$ összefüggés egy egyenest ad meg, és minden kétismeretlenes, elsőfokú egyenlet (x és y ismeretlenekkel) megfeleltethető egy egyenesnek a koordinátságokon. Úgy is fogalmazhatunk, hogy

1. az egyenes **minden pontjának** két koordinátájára érvényes az egyenletében megadott összefüggés (vagyis az e pontjainak x és y koordinátájára érvényes, hogy $x = 3y - 5$), ugyanakkor
2. **csak az egyenesen találhatók** olyan pontok a koordinátságokon, amelyeknek koordinátáira érvényes az összefüggés (vagyis az összes pont, amelynek x és y koordinátájára $3x - y = 5$ fennáll, rajta van az e egyenesen).

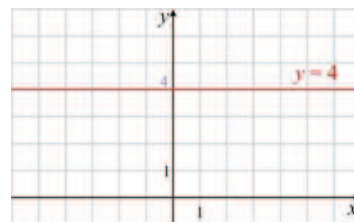
Megjegyzés: Sok alakzat egyenlete az egyenes egyenleténél algebrailag bonyolultabb. Az alábbi ábra példákat mutat görbékre és egyenleteikre:



Általánosságban egy alakzat egyenletén olyan egyenletet értünk, amelyet az alakzat pontjainak koordinátái, és csakis azok tesznek igazzá.

Másképpen fogalmazva, egy alakzat egyenletét pontjainak koordinátái kielégítik, és a pontjain kívül semmilyen más pont koordinátái nem elégítik ki.

Ha az alakzat egyenlete $y = 4$, akkor a pontjai $(x; 4)$ alakúak, ahol x végigfutja a valós számok halmazát. Ez az alakzat egy x tengellyel párhuzamos egyenes.



Egy alakzat egyenlete alkalmas arra is, hogy ha egy pontjának megadjuk az egyik koordinátáját, akkor az egyenletből meghatározhatjuk a másik koordináta értékét. Például ha a pont a $3x - y = 5$ egyenes egyik pontja, és a pont y koordinátája 1, akkor ezt behelyettesítve az egyenletbe, megkapjuk a pont x koordinátáját: $3x - 1 = 5 \Rightarrow x = 2$, vagyis a pont a $(2; 1)$.

Megjegyzés: A számítógépek a görbéket ugyanilyen elv alapján tárolják és ábrázolják: részgörbékre bontják, és a képpontok helyett a görbék egyenleteinek megfelelő kifejezéseket, kiszámított állandókat tárolják.

Az egyenes irányának jellemzői

Az egyenes irányát jellemző mennyiségek:

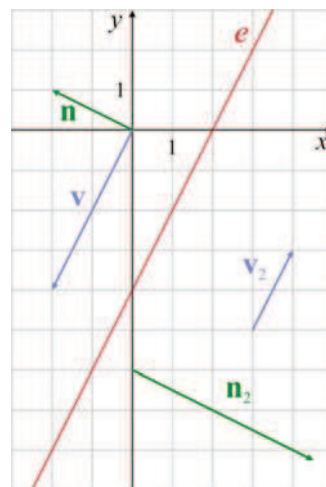
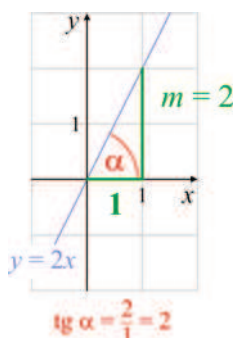
irányvektor, $\mathbf{v}(v_1; v_2)$: olyan vektor, amely az egyenessel párhuzamos, és hossza nem nulla;

normálvektor, $\mathbf{n}(A; B)$: olyan vektor, amely az egyenesre merőleges, és hossza nem nulla;

irányszög, α : az egyenesnek az x tengely pozitív irányával bezárt szöge,

nagysága $-90^\circ < \alpha \leq 90^\circ$;

meredekség, m : például az $y = mx + b$ alakú egyenes egyenletéből határozhatjuk meg; azt mutatja meg, hogy az x tengely pozitív irányába egységnyit lépve mennyit „emelkedik” vagy „süllyed” az egyenes.



Az egyenes meredekségének két másik elnevezését is használjuk: **iránytényező** és **iránytangens**. A meredekség az egyenes irányszögének tangensével egyenlő:

$$m = \operatorname{tg} \alpha.$$

Megjegyzés: Nem minden egyenesnek van meredeksége. 90° -nak nincs tangense, ezért az $x = \text{állandó}$ egyenletű, y tengellyel párhuzamos egyenesek esetén iránytényezőről nem beszélhetünk.

Az egyenes egyenletei

Az egyenes egyenletének felírásához szükségünk van az egyenes egy pontjára, amit $P_0(x_0; y_0)$ -al jelölünk. Ezenkívül vagy egy másik pont, vagy egy olyan adat, amelyik az egyenes irányát jellemzi.

A $\mathbf{v}(v_1; v_2)$ irányvektorú, $P_0(x_0; y_0)$ ponton átmenő egyenes egyenlete (röviden irányvektoros egyenlet): $v_2 \cdot (x - x_0) = v_1 \cdot (y - y_0)$, átalakított formájában $v_2x - v_1y = v_2x_0 - v_1y_0$.

Az $\mathbf{n}(A; B)$ normálvektorú, $P_0(x_0; y_0)$ ponton átmenő egyenes egyenlete (röviden normálvektoros egyenlet): $Ax + By = Ax_0 + By_0$.

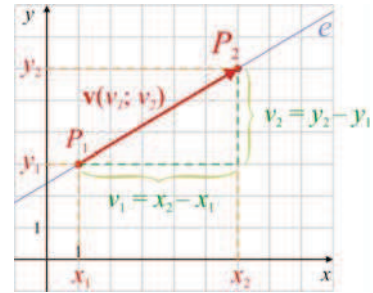
Az m iránytangensű, $P_0(x_0; y_0)$ ponton átmenő egyenes egyenlete (röviden iránytényező egyenlet): $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Ezt átalakítva kapjuk a jól ismert $y = mx + b$ alakot ($b = y_0 - mx_0$).

Megjegyzések:

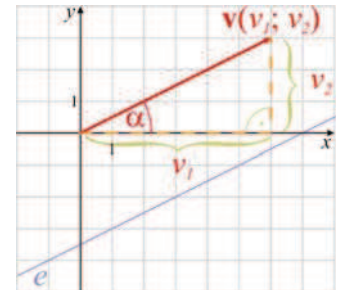
1. Ha $P_1(x_1; y_1)$ és $P_2(x_2; y_2)$ az egyenes két pontja, akkor egy irányvektor a pontok koordinátaiból is meghatározható:

$$\mathbf{v}(v_1; v_2) = \mathbf{v}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$$



2. Az egyenes egyenletei egymásból levezethetők. A meredekség és az irányvektor között találjuk a következő kapcsolatot:

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_2}{v_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



Ezt beírva az iránytétezős egyenletbe: $y - y_0 = \frac{v_2}{v_1}(x - x_0)$.

v_1 -el szorozva $v_1 \cdot (y - y_0) = v_2 \cdot (x - x_0)$, vagyis az irányvektoros egyenlet adódik.

3. A normálvektoros egyenlet is levezethető az irányvektoros egyenletből. Ehhez azt használjuk fel, hogy a normálvektort $+90^\circ$ -kal vagy -90° -kal elforgatva az egyenes egy irányvektorát kapjuk: $\mathbf{n}(A; B) \rightarrow \mathbf{v}(B; -A)$. v_1 helyébe B -t, v_2 helyébe $(-A)$ -t helyettesítünk az irányvektoros egyenletbe, és átalakítjuk:

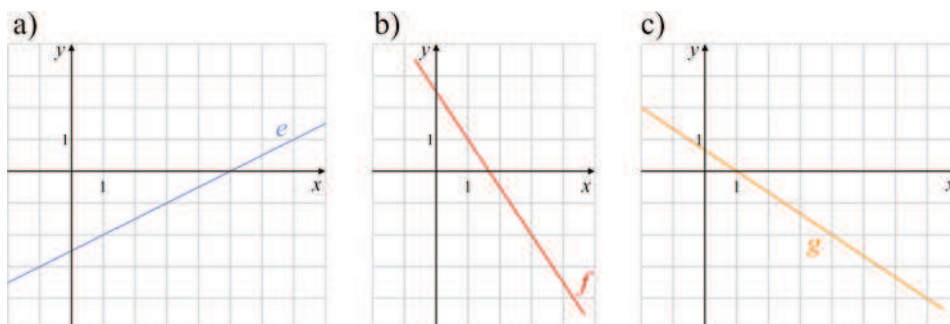
$$-A \cdot (x - x_0) = B \cdot (y - y_0) \Rightarrow Ax_0 + By_0 = Ax + By.$$







4. Az eddigi egyenleteken kívül az egyenesnek több egyenlete is ismeretes. Az egyenes egyenletének általános alakja: $Ax + By + C = 0$, ahol A , B és C állandók (A és B közül legfeljebb az egyik lehet 0, azaz $A^2 + B^2 \neq 0$).

Térben ez kiegészül az $Ax + By + Cz + D = 0$ alakra ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$).

Feladatok

13. Határozd meg a következő egyenesek meredekségét, irányszögét, valamely irányvektorát és normálvektorát!



-  **14.** Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek irányvektora \mathbf{v} , és átmegy a megadott ponton! a) $\mathbf{v}(3; 5)$, $A(1; 3)$; b) $\mathbf{v}(-2; 7)$, $B(0; -3)$;
c) $\mathbf{v}(0; 4)$, $C(0; 0)$; d) $\mathbf{v}(-2; 2)$, $D(-4; -6)$.
-  **15.** Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek normálvektora \mathbf{n} , és átmegy a megadott ponton! a) $\mathbf{n}(-3; 5)$, $A(3; 0)$; b) $\mathbf{n}(0; -2)$, $C(0; 0)$;
c) $\mathbf{n}(5; 10)$, $B(-2; 4)$; d) $\mathbf{n}(-3; 2)$, $D(-3; -2)$.
-  **16.** Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek meredeksége m , és átmegy a megadott ponton! a) $m = \frac{3}{4}$, $A(4; -2)$; b) $m = -1$, $B(-2; -2)$;
c) $m = -\frac{2}{3}$, $C(4; -2)$; d) $m = 0$, $D(-2; -2)$.
-  **17.** Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek irányszöge α , és átmegy a megadott ponton! a) $\alpha = 45^\circ$, $A(-3; 4)$; b) $\alpha = 135^\circ$, $P(0; 2)$;
c) $\alpha = 60^\circ$, $C(5; -1)$; d) $\alpha = 141,3^\circ$, $R(5; 6)$.
-  **18.** Határozd meg a következő egyenesek irányszögét, valamely irányvektorát és normálvektorát! a) $e: 2x - y = 5$; b) $f: 4y - 7 = -2x$; c) $g: x + 7 = 0$;
d) $h: y = 3$.
-  **19.** Az egyenes négy irányjellemző adatából (α , m , \mathbf{v} és \mathbf{n}) egyet megadtunk. Add meg a többi jellemző értékét! a) $m = \frac{2}{3}$; b) $\mathbf{v}(3; -7)$;
c) $\mathbf{n}(5; 3)$; d) $\alpha = 66,04^\circ$.

Mintapélda₃

Adott $A(-4; 1)$, $B(4; 5)$ és $C(4; -5)$. Írjuk fel az ABC háromszög néhány nevezetes vonalának egyenletét: az m_c magasság, s_a súlyvonal és k_c középvonal egyenletét keressük.

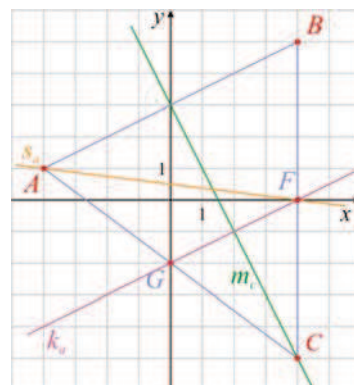
Megoldás:

Az egyenesek egyenletéhez olyan vektorokat keresünk, amelyek párhuzamosak az adott egyenessel vagy merőlegesek rá.

m_c felírásához az \overrightarrow{AB} vektort használjuk, mert merőleges m_c -re, így normálvektor:

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB}(b_1 - a_1; b_2 - a_2) = \overrightarrow{AB}(8; 4).$$

$$m_c : \begin{cases} \mathbf{n}(8; 4) \\ C(4; -5) \end{cases} \quad \begin{array}{l} Ax + By = Ax_0 + By_0 \\ 8x + 4y = 8 \cdot 4 - 4 \cdot 5 \quad / : 4 \\ \underline{\underline{m_c : 2x + y = 3}} \end{array}$$



s_a egyenes párhuzamos \overrightarrow{AF} vektorral. Az \overrightarrow{AF} -t meghatározzuk, ez a keresett súlyvonal egyenesének egyik irányvektora. Az egyenes egyenletének meghatározásához mindegy, hogy az A vagy az F pont koordinátáit helyettesítjük be, ugyanazt az eredményt kapjuk.

$$\text{A felezőpont: } F\left(\frac{b_1 + c_1}{2}; \frac{b_2 + c_2}{2}\right) = F(4; 0),$$

$$\overrightarrow{AF}(f_1 - a_1; f_2 - a_2) = \overrightarrow{AF}(8; -1)$$

$$s_a : \begin{cases} \mathbf{v}(8; -1) \\ F(4; 0) \end{cases} \quad \begin{array}{l} v_2x - v_1y = v_2x_0 - v_1y_0 \\ -x - 8y = (-1) \cdot 4 - 8 \cdot 0 \\ \underline{\underline{s_a : x + 8y = 4}} \end{array}$$

k_c középvonallal párhuzamos az \overrightarrow{AB} , és a középvonal átmegy az F felezőponton. Mivel $\overrightarrow{AB}(8; 4)$, ezért a normálvektor: $\mathbf{n}(4; -8)$.

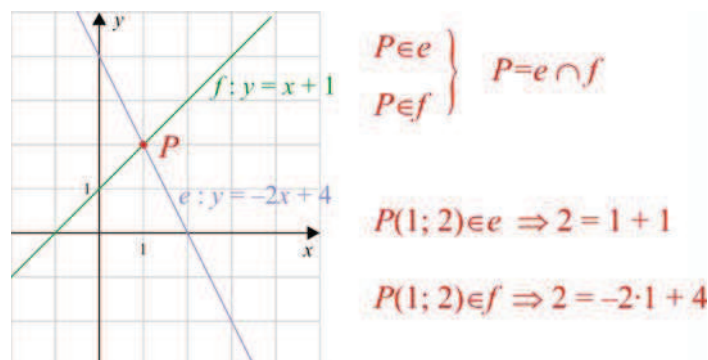
$$k_c : \begin{cases} \mathbf{n}(4; -8) \\ F(4; 0) \end{cases} \quad \begin{array}{l} Ax + By = Ax_0 + By_0 \\ 4x - 8y = 4 \cdot 4 + (-8) \cdot 0 \quad / : 4 \\ \underline{\underline{k_c : x - 2y = 4}} \end{array}$$

III. Egyenesek kölcsönös helyzete

Egyenesek metszéspontja

Két metsző egyenes metszéspontja mindkét egyenesre illeszkedik, ezért a metszéspont koordinátái igazgá teszik mindkét egyenes egyenletét.

Az egyenesek (és bármely két görbe) metszéspontját úgy határozzuk meg, hogy megoldjuk az egyenleteikből álló egyenletrendszert.



Feladatok

- 28.** Egy négyzet A csúcsából kiinduló két oldalának egyenlete $y = 2x - 4$ és $2y + x = 22$.


Válaszd ki az A csúcs az origótól mért távolságát az alábbiak közül!

- a) 6; b) 7; c) 8; d) 9; e) 10.

- 29.** Készíts vázlatot, majd határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik áthalad az e és f egyenes metszéspontján, és még egy adott P ponton!

- a) $e: x + y = 1$; $f: y + 5 = 2x$; $P(-3; -1)$;
 b) $e: 2y = x + 1$; $f: 2y + 13 = 3x$; $P(-1; -2)$;
 c) $e: 2y = 2x + 17$; $f: 4y + 3x = 6$; $P(-2; 1)$.

- 30.** Adott a háromszög három csúcsa: $A(-5; 5)$, $B(7; 1)$, $C(-1; -7)$. Határozd meg a C csúcsához tartozó magasság talppontját!

 **31.** Adott a háromszög három csúcsa: $A(0; 6)$, $B(-6; 2)$, $C(4; -2)$. Határozd meg a következő pontokat:

- Az a oldalhoz tartozó magasság és a b oldalhoz tartozó súlyvonal metszéspontja;
- A c oldalhoz tartozó magasság és a c oldalhoz tartozó középvonal metszéspontja;
- A háromszög magasságpontja;

Párhuzamos és merőleges egyenesek

Mintapélda₄

Egy háromszög csúcsai: $A(0; -3)$, $B(8; 3)$, $C(-4; 5)$.

- Írjuk fel a C csúccsal szemközti oldalegyenes (c), a c oldalhoz tartozó magasság (m) és oldalfelező merőleges (f), valamint a c oldallal párhuzamos középvonal (k) egyenletét!
- Határozzuk meg c , k , m és f egyenesek valamely irányvektorát, valamely normálvektorát és meredekségét!
- Hasonlítsuk össze az előbb kapott értékeket, és keressünk szabályt: mikor párhuzamos egymással két egyenes, illetve mikor merőleges egymásra két egyenes?

Megoldás:

$$a) \overrightarrow{AB}(b_1 - a_1; b_2 - a_2) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(8; 6) \xrightarrow{90^\circ} (6; -8)$$

$$AC \text{ felezőpontja: } \left(\frac{a_1 + c_1}{2}; \frac{a_2 + c_2}{2} \right) = (-2; 1),$$

$$AB \text{ felezőpontja: } \left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2} \right) = (4; 0),$$

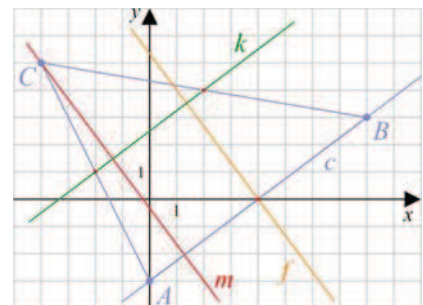
$$c: \begin{cases} \mathbf{v} = \overrightarrow{AB}(8; 6) \\ A(0; -3) \end{cases} \Rightarrow c: 3x - 4y = 12 \quad k: \begin{cases} \mathbf{v} = \overrightarrow{AB}(8; 6) \\ (-2; 1) \end{cases} \Rightarrow c: 3x - 4y = -10$$

$$m: \begin{cases} \mathbf{n} = \overrightarrow{AB}(8; 6) \\ A(0; -3) \end{cases} \Rightarrow c: 4x + 3y = -9 \quad f: \begin{cases} \mathbf{n} = \overrightarrow{AB}(8; 6) \\ (4; 0) \end{cases} \Rightarrow c: 4x + 3y = 16$$

- A normálvektorokat leolvassuk az egyenesek $Ax + By = Ax_0 + By_0$ alakú egyenletéből: $\mathbf{n}_c(3; -4)$; $\mathbf{n}_k(3; -4)$; $\mathbf{n}_m(4; 3)$; $\mathbf{n}_f(4; 3)$.

A normálvektort 90° -kal elforgatva kapunk irányvektorokat:

$$\mathbf{v}_c(4; 3); \quad \mathbf{v}_k(4; 3); \quad \mathbf{v}_m(3; -4); \quad \mathbf{v}_f(3; -4).$$



A meredekségeket leolvashatjuk, ha az egyenesek egyenleteit $y = mx + b$ alakúra alakítjuk, de használhatjuk az $m = \frac{v_2}{v_1}$ összefüggést is:

$$m_c = \frac{3}{4}; \quad m_k = \frac{3}{4}; \quad m_m = -\frac{4}{3}; \quad m_f = -\frac{4}{3}.$$

c)

Egymással párhuzamos egyenesek esetén az irányvektorai, illetve a normálvektorai is párhuzamosak (egymás skalárszorosai).

Irányvektora azonban végtelen sok lehet egy egyenesnek, ezért célszerű az iránytényezők között is összefüggést megfogalmazni (mármint ha van az egyenesnek iránytényezője). Természetesen a párhuzamos egyenesek irányszöge megegyezik, míg a merőleges egyenesek irányszögének különbsége 90° .

Két egyenes akkor és csak akkor párhuzamos, ha iránytényezőjük


megegyezik: $e \parallel f \Leftrightarrow m_e = m_f$

Két egyenes akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha iránytényezőjük

egymás negatív reciproka: $e \perp f \Leftrightarrow m_e = -\frac{1}{m_f}$

A fenti feltételrendszer csak iránytényezővel rendelkező egyenesekre érvényes. (A merőleges esetben egyik iránytényező sem nulla.)

Feladatok

 **32.** Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik merőleges az $f: y = \frac{4}{7}x + 4$

egyenesre, és átmegy a $P(3; 6)$ ponton!

 **33.** Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik párhuzamos az


$f: 4y + x = 12$, egyenessel, és átmegy a $P(-5; 2)$ ponton!


 **34.** Az e egyenes egyenlete: $4y = px - 5$.

- a) Igaz-e, hogy $p = 3$ esetén e párhuzamos az $f : 3y + 1 = 4x$ egyenessel?
 b) p milyen értéke mellett lesz e merőleges az $f : 3y + 2 = 12x$ egyenesre?

 **35.** Az alábbi egyenesek közül melyik merőleges az $y + 2x = 5$ egyenesre?

$$e : y = 2x + 2; \quad f : y = \frac{1}{2}x + 3; \quad g : y = -\frac{1}{2}x - 1; \quad h : y = -2x; \quad i : y = x - 2.$$

 **36.** Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik áthalad $e : 3y = x + 10$ és $f : 2y + x = 5$ egyenesek metszéspontján, és párhuzamos a $g : 3y = 2x + 2$ egyenessel!

 **37.** Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik áthalad $e : 2y + 3x = 1$ és $f : 2y + 3 = x$ egyenesek metszéspontján, és merőleges a $g : 3y + 2x = 25$ egyenesre!

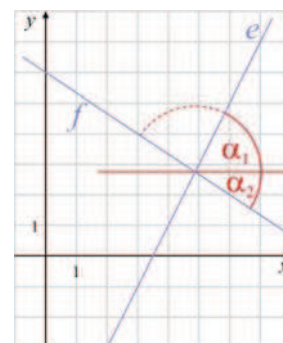
Mintapélda₅

Határozzuk meg a következő két egyenes hajlásszögét: $e : y = 2x - 7$ és $f : y = -\frac{3}{4}x + 6$.

Megoldás: A feladat megoldásához célszerű felrajzolni az egyeneseket, és az ábrán megvizsgálni a hajlásszögüket, amelyek nagysága az iránytangensekből számítható: $\operatorname{tg} \alpha_1 = 2 \Rightarrow \alpha_1 \approx 63,43^\circ$ és

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| -\frac{3}{4} \right| \Rightarrow \alpha_2 \approx 36,87^\circ.$$

A két szög összege adja a hajlásszöget: $\alpha_1 + \alpha_2 \approx 100,3^\circ$. Mivel ez 90° -nál nagyobb, ezért a megoldás $180^\circ - 100,3^\circ = 79,7^\circ$.



Mintapélda₆

Határozzuk meg a következő két egyenes távolságát: $e: y = \frac{3}{2}x - 4$ és $f: y = \frac{3}{2}x + 3$.

1. megoldás:

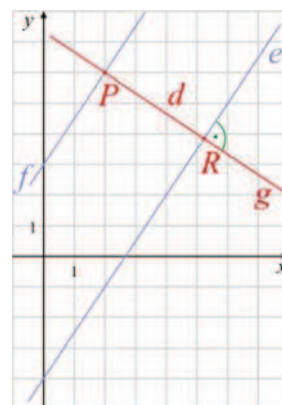
Észrevehetjük, hogy a két egyenesnek egyenlő az irányítányezője, ezért párhuzamosak.

Az f egyenes egyik tetszőleges pontját (P) kiválasztva, ezen át merőleget állítunk az e egyenesre (g), és meghatározzuk e és g metszéspontját (R). Végül kiszámítjuk a PR távolságot (d).

$$g: \begin{cases} P(2; 6) \\ m = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow y - 6 = -\frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow g: 2x + 3y = 22$$

$$R = e \cap g \Rightarrow \begin{cases} e: -3x + 2y = -8 \\ g: 2x + 3y = 22 \end{cases} \Rightarrow R\left(\frac{68}{13}; \frac{50}{13}\right).$$

$$d = \overline{PR} = \sqrt{(p_1 - r_1)^2 + (p_2 - r_2)^2} \Rightarrow \overline{PR} = \sqrt{\frac{196}{13}} \approx 3,9.$$



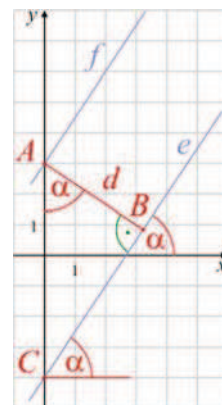
2. megoldás:

Tekintsük az ábrán látható ABC derékszögű háromszöget, melynek α szöge az egyenesek irányszögével egyenlő:

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha \approx 56,3^\circ.$$

Az AB távolság meghatározásához tudjuk, hogy $AC = 7$ egység, és az ABC háromszögből szögfüggvénnyel kiszámítjuk a keresett távolságot:

$$d = \overline{AC} \cdot \cos \alpha \approx 3,9.$$



Megjegyzés: Mindkét megoldási módszernek van előnye és hátránya. Az első megoldás több számolással (és ezzel együtt több hibázási lehetőséggel is) jár, viszont pontos irracionális értéket kapunk. A második esetben rövidebb, egyszerűbb a számítás, de a kerekítések (és a lehetséges kerekítési hibák) miatt előfordulhat, hogy az előzőnél kevésbé pontos megoldást kapunk.

Feladatok



38. Határozd meg az origó és az adott egyenesek távolságát, ha

a) $3y + 12 = x$; b) $y = 4x + 10$; c) $5x + 8y = 16$; d) $3x = 8y + 13$.



39. Határozd meg a P pont és az e egyenes távolságát, ha

a) $P(-4; 4)$, $e: x = 3$; b) $P(-4; 7)$, $e: y = x + 2$; c) $P(-4; -1)$, $e: 2x + 3y = 16$.



40. Határozd meg e és f egyenesek hajlásszögét!

a) $e: 2y = x + 7$, $f: 2y + 3x = -5$;

b) $e: 3y = 2x + 21$, és az f egyenes áthalad a $P(0; -4)$ és $R(-2; 2)$ pontokon.



41. Határozd meg e és f egyenesek távolságát, ha

a) $e: y = 3x - 5$; $f: y = 3x + 3$;

b) $e: 5y + 4 = 2x$; $f: 2x + 7 = 5y$;

c) $e: 4x + 3y = 2$; $f: 4x + 3y = 12$.



42. Egy négyzet A csúcsából kiinduló két oldalának egyenlete $3y - x = 15$ és $y = -3x - 15$.

Válaszd ki az A csúcs az origótól mért távolságát az alábbiak közül!

a) 6; b) $9\sqrt{5}$; c) 8; d) $\sqrt{45}$; e) $\sqrt{10}$.



43. Egy négyzet két oldalegyenesének egyenlete: $3x + 5y = 10$ és $3x + 5y = -15$. Határozd meg a négyzet területét!








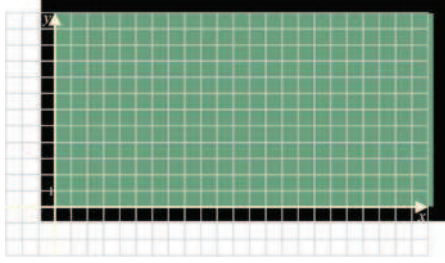


44. Egy szabályos hatszög két oldalegyenesének egyenlete: $4y = x + 18$ és $4y = x - 12$.










Határozd meg a hatszög területét!



45. Egy repülő a megfigyelő radar képernyőjén az $e: 4y + 3x = -7$ egyenletű egyenesen halad. Mellette mindkét oldalon, tőle 4 egység távolságban két másik repülő nyomvonal látható. Határozd meg a másik két repülő útjának egyenletét!

IV. Vegyes feladatok

-  **46.** Adott az egyenlőszárú háromszög alapjának két végpontja: $A(-1; -1)$ és $B(-5; 5)$, a harmadik (C) csúcs az $e: y + 3 = 3x$ egyenesre illeszkedik. Határozd meg C koordinátáit!
-  **47.** Adott egy háromszög két csúcsa: $A(-5; -3)$ és $B(9; -6)$, valamint a súlypontja $S(2; -1)$.
 a) Határozd meg a hiányzó C csúcsot!
 b) Határozd meg a háromszög oldalegyeneseit!
-  **48.** A P pontot tükröztük az e egyenesre. Határozd meg a tükörkép (P') koordinátáit!
 a) $e: 2y + 4x = -9$, $P(-4; -3)$; b) $e: y + 6 = 3x$, $P(6; -3)$.
-  **49.** Egy tűzoltó helikopter repül a $B(8; 6)$ bázisról a $T(-4; 2)$ tüzesethez, miközben vizet vesz fel az $y = -1$ egyenletű folyóból.
 Határozd meg a folyónak azt a pontját, amelyet a lehető legrövidebb út megtétele közben érintenie kell!
-  **50.** Egy biliárdasztal egyik sarkához rögzített koordináta-rendszerben a piros golyó az $A(4; 4)$ pontban, a kék golyó a $B(16; 10)$ pontban áll. A pirossal a falat (x tengelyt) érintve kell eltalálni a kék golyót.
 a) Milyen egyenletű egyenes mentén kell elindítani a piros golyót?
 b) A faltól számítva milyen szögben indítsuk a piros golyót?
- 
-  **51.** Egy biliárdasztal egyik sarkához rögzített koordináta-rendszerben a piros golyó az $A(2; 10)$ pontban, a kék golyó a $B(16; 4)$ pontban áll. A pirossal mindkét falat (y , majd x tengelyt) érintve kell eltalálni a kék golyót.
 a) Milyen egyenletű egyenes mentén kell elindítani a piros golyót?
 b) Milyen szögben indítsuk a piros golyót?
-  **52.** Egy háromszög két csúcsának koordinátái $A(-5; -5)$ és $B(1; 6)$, és a harmadik csúcsnál levő szöget az $y = 2$ egyenes felezi. Határozd meg a harmadik csúcs koordinátáit!

-  **53.** Adott az $A(-5; 3)$ és $B(7; 6)$ pont. Határozd meg az x tengelynek azt a P pontját, amelyre az APB törött vonal hossza a lehető legrövidebb!
-  **54.** Állítsunk az $e: 2y = x + 4$ egyenesre merőlegest a 4 abszcisszájú pontjában. Ennek az egyenesnek melyik lesz az a pontja, amelynek az ordinátája kétszer akkora, mint az abszcisszája?
-  **55.** Egy négyzet átlójának egyenese $e: 5y = x + 1$, egyik csúcsa $A(3; -7)$. Határozd meg a négyzet többi csúcsát!
-  **56.** Az $A(3; 6)$ pont és $e: x + 2y = 5$ egyenesre tükrözött képe (C) egy négyzet szemközti csúcsait adják. Határozd meg a hiányzó csúcsok koordinátáit!
-  **57.** $A(-2; 6)$ a négyzet egyik csúcsa, $e: 18x - 4y = 25$ az egyik középvonala. Határozd meg a hiányzó csúcsokat!
-  **58.** Egy háromszög egyik csúcsa $A(-6; 0)$, másik két csúcson átmenő magasságvonal egyenlete $m_b: 9x + 5y = -24$ és $m_c: 5x - 3y = 0$. Határozd meg a háromszög hiányzó csúcsainak koordinátáit!
-  **59.** A $g: 2y + x = 6$ egyenesnek melyik pontja van egyenlő távolságra az $e: 2y = x + 10$ és $f: 2y = x - 6$ párhuzamos egyenesektől?
-  **60.** Adott a háromszög $B(-6; 6)$ csúcsa, valamint az a oldalhoz tartozó súlyvonalának és magasságvonalának egyenlete: $s_a: 9x - 8y + 26 = 0$, $m_a: 5y = 4x + 26$. Határozd meg a hiányzó csúcsok koordinátáit!
-  **61.** Egy koordináta-rendszerben adottak az $A(-8,0)$, $B(0,-3)$, $C(8,0)$, $D(0,3)$ pontok. Igaz-e, hogy ez a négy pont egy rombuszt határoz meg? A választ indokold!

Kislexikon

Abszcisszatengely: a koordináta-rendszer x tengelye.

Ordinátatengely: a koordináta-rendszer y tengelye.

Alakzat egyenlete: olyan egyenlet, amelyet az alakzat pontjainak koordinátái, és csakis azok tesznek igazzá. Másképpen fogalmazva egy alakzat egyenletét pontjainak koordinátái kielégítik, és pontjain kívül semmilyen más pont koordinátái nem elégítik ki.

Meredekség: megmutatja, hogy ha az egyenes egyik pontjától 1 egységgel x irányba lépünk, akkor y irányba hány egységet kell lépnünk egy másik pont megjelöléséhez.

Az egyenes irányát jellemző mennyiségek:

irányvektor, $\mathbf{v}(v_1; v_2)$: olyan vektor, amely az egyenessel párhuzamos, és hossza nem nulla;

normálvektor, $\mathbf{n}(A; B)$: olyan vektor, amely az egyenesre merőleges, és hossza nem nulla;

irányszög, α : az egyenes x tengely pozitív irányával bezárt szöge, nagysága $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$;

meredekség, m : például az $y = mx + b$ alakú egyenes egyenletéből határozhatjuk meg; azt mutatja meg, hogy az x tengely pozitív irányába egységnyit lépve mennyit „emelkedik” vagy „süllyed” az egyenes.

iránytényező, iránytangens: az egyenes meredekségének két másik neve. A meredekség az egyenes irányszögének tangensével egyenlő:

$$m = \operatorname{tg} \alpha.$$

Megjegyzés: Nem minden egyenesnek van meredeksége. 90° -nak nincs tangense, ezért az $x = \text{állandó}$ egyenletű, y tengellyel párhuzamos egyenesek esetén az iránytényezőről nem beszélhetünk.

Az egyenes egyenletei a síkbeli koordináta-rendszerben:

$y = mx + b$ alak: az egyenesek grafikonjának ábrázolásakor is használjuk.

m jelenti a meredekséget, b pedig azt az értéket, ahol az egyenes metszi az y tengelyt.

irányvektoros egyenlet: a $\mathbf{v}(v_1; v_2)$ irányvektorú, $P_0(x_0; y_0)$ ponton átmenő egyenes egyenlete: $v_2 \cdot (x - x_0) = v_1 \cdot (y - y_0)$, másik formájában $v_2x - v_1y = v_2x_0 - v_1y_0$;

normálvektoros egyenlet: az $\mathbf{n}(A; B)$ normálvektorú, $P_0(x_0; y_0)$ ponton átmenő egyenes egyenlete: $Ax + By = Ax_0 + By_0$;

iránytényezős egyenlet: Az m iránytangensű, $P_0(x_0; y_0)$ ponton átmenő egyenes egyenlete: $y - y_0 = m(x - x_0)$;

általános alak: $Ax + By + C = 0$, ahol $A^2 + B^2 \neq 0$.

Egyenesek párhuzamosságának feltétele:

$$e \parallel f \Leftrightarrow m_e = m_f \quad (m_e \neq 0, m_f \neq 0).$$

Egyenesek merőlegességének feltétele:

$$e \perp f \Leftrightarrow m_e = -\frac{1}{m_f} \quad (m_e \neq 0, m_f \neq 0).$$

Egyenesek metszéspontjának meghatározása: megoldjuk az egyenleteikből álló egyenletrendszert.

7. MODUL

KOORDINÁTA- GEOMETRIA₂ – A KÖR

Készítette: Vidra Gábor

I. A kör egyenlete

Mintapélda₁

Jelölje k a $C(3; -5)$ középpontú, 10 egység sugarú kört.

a) Ábrázoljuk a kört koordináta-rendszerben!

b) Döntsük el a $P(-7, -5)$, $Q(15; -5)$, $R(9; 3)$ és $S(3; -13)$ pontokról, hogy illeszkednek-e k -ra!

Megoldás: Az esetek többségében az ábráról nem olvasható le pontosan az illeszkedés, ezért ellenőrzésnek használjuk a Pitagorasz-tételt! Gondoljuk végig, mi annak a feltétele, hogy a pont a körön legyen! (Például 8; 6 és 10 pitagoraszai számhármast alkotnak.) P és R illeszkednek, S és Q nem illeszkedik a körre.

c) Keressünk további pontokat, amelyek illeszkednek k körre!

d) Határozzuk meg, hogy a kör hol metszi a tengelyeket!

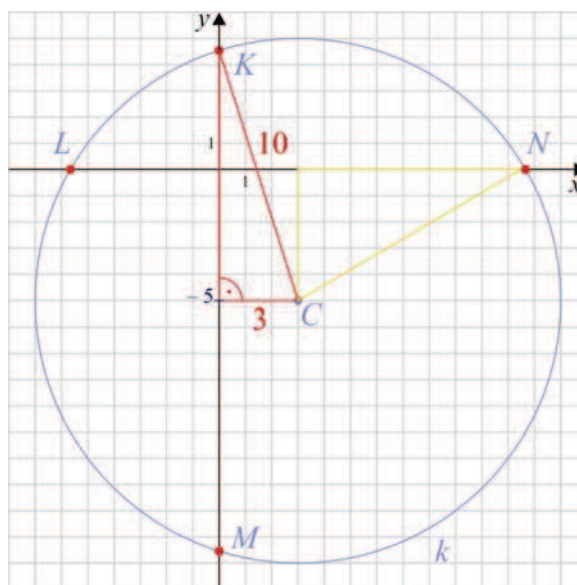
Megoldás:

A négyzetrács adta lehetőségeket kihasználva, a Pitagorasz-tétel segítségével határozzuk meg a tengelymetszetekhez tartozó távolságokat. Például az ábrán pirossal jelölt derékszögű háromszögben a nagyobb befogó hossza:

$$\sqrt{10^2 - 3^2} = \sqrt{91} \approx 9,5.$$

Így az y tengellyel alkotott metszéspontok:

$$K(0, 4,5) \text{ és } M(0; -14,5).$$



Hasonlóan, a másik jelölt derékszögű háromszögben az x tengelyen található befogó hossza:

$$\sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} \approx 8,7.$$

Az x tengellyel alkotott metszéspontok:

$$N(11,7; 0) \text{ és } L(-5,7; 0).$$

e) A kör egy pontjának abszcisszája (x koordinátája) -1 . Határozzuk meg a pont hiányzó ordinátáját (y koordináta)!

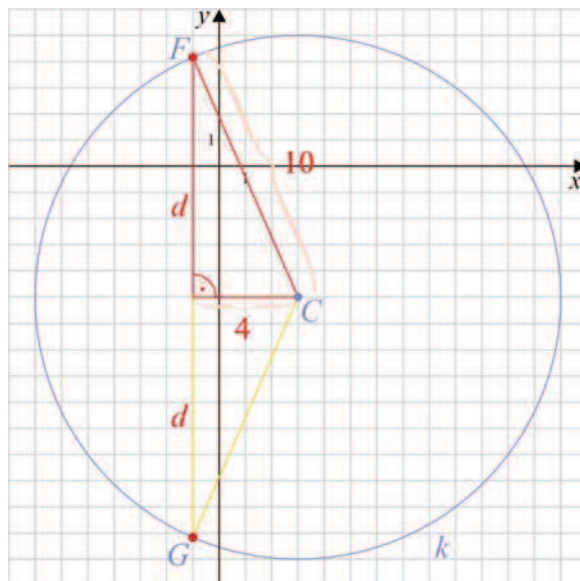
Megoldás:

A tengelymetszetek esetében alkalmazott módszert használjuk: a négyzetrácson megkeressük a megfelelő derékszögű háromszöget.

$$d = \sqrt{10^2 - 4^2} = \sqrt{84} \approx 9,2.$$

Két pontot találtunk.

$$F(-1; 4,2) \text{ és } G(-1; -14,2).$$



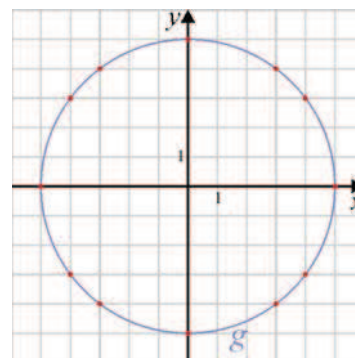
Mintapélda₂

a) Jelölje g az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű görbét. Keressünk olyan pontokat, amelyek illeszkednek a görbére, és ábrázoljuk a megtalált pontokat koordináta-rendszerben!

Megoldás:

A 3; 4; 5 pitagoraszis számhármass (azaz igaz rá, hogy $3^2 + 4^2 = 5^2$). Ennek ismeretében az egész koordinátájú pontokat könnyű megtalálni: (0; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 0). A szimmetria miatt ezen pontok tükörképei a tengelyekre és az origóra szintén a görbe pontjai, pl. (-3; 4) vagy (-3; -4). Nem egész koordinátájú pontok a görbén például $(2; -\sqrt{21})$, $(-3,5; \sqrt{12,75})$ stb.

A pontok egy körön helyezkednek el.



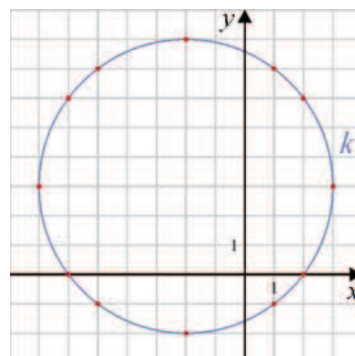
b) Jelölje k az $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ egyenletű görbét. Keressünk olyan egész koordinátájú pontokat, amelyek illeszkednek a görbére, és ábrázoljuk a megtalált pontokat koordináta-rendszerben!

Megoldás:

Az a) feladathoz hasonlóan járunk el.

A pontok most is egy körön helyezkednek el.

Az egész koordinátájú pontok: $(3; 3)$, $(2; 6)$, $(1; 7)$, $(-2; 8)$, $(-5; 7)$, $(-6; 6)$, $(-7; 3)$, $(-6; 0)$, $(-5; -1)$, $(-2; -2)$, $(1; -1)$, $(2; 0)$.



A 2. mintapéldában kapott ponthalmazok körök, amelyeknek egyenletei: $x^2 + y^2 = 25$, illetve $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$. Az 1. mintapéldában található kör középpontja $C(3; -5)$, sugara 10 egység, és a kör pontjainak koordinátáira érvényes az $(x-3)^2 + (x+5)^2 = 100$ összefüggés. Ezek az egyenletek a körvonal minden pontjának koordinátáira érvényesek, és a körvonalra nem illeszkedő pontok koordinátái nem teszik igazzá az egyenleteket.

A $C(u; v)$ középpontú, r sugarú **kör egyenlete:**

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

Mintapél₃

Írjuk fel az $A(-6; 4)$ és $B(2; -2)$ végpontú AB szakasz Thalész-körének egyenletét!

Megoldás:

A köregyenlethez a középpont koordinátáira és a sugarra van szükség.





- A középpont az AB szakasz felezőpontja: $F\left(\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}\right) = F(-2; 1)$.

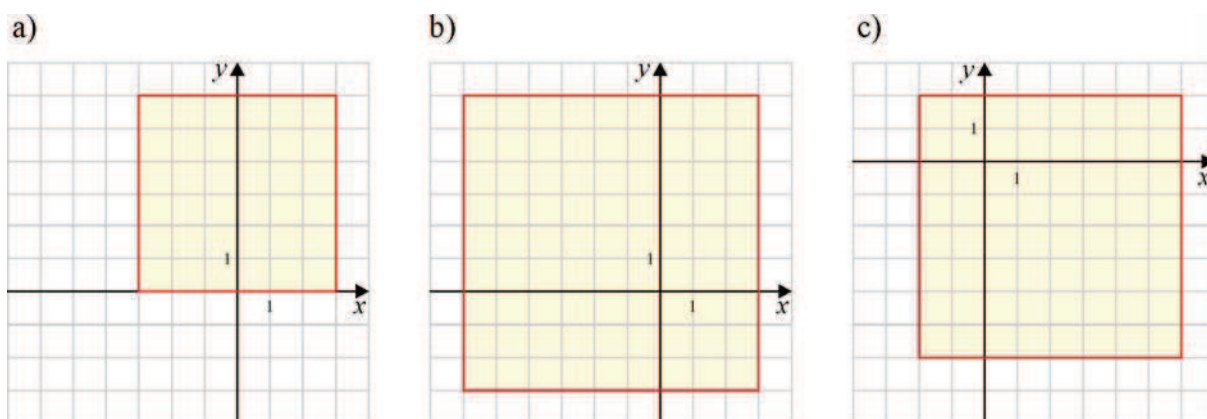
- A sugár az AB szakasz hosszának a fele, és






$$\overline{AB} = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2} = \sqrt{64+36} = 10.$$

Az $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$ köregyenletbe behelyettesítve az $u = -2$; $v = 1$ és $r = 5$ értékeket: $[x-(-2)]^2 + (y-1)^2 = 25$, ahonnan a megoldás: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$.

Feladatok

-  **1.** Írd fel az AB szakasz Thalész-körének egyenletét, ha a szakasz végpontjai:
 a) $A(-6; 0)$, $B(0; 0)$; b) $A(2; -6)$, $B(-4; 6)$; c) $A(6; 4)$, $B(-4; 1)$.
-  **2.** Egy rádióadó helye a koordináta-rendszerben a $P(5; -4)$ pont, és az adás 13 egység sugarú körben fogható. Döntsd el az alábbi pontokról ábrázolás nélkül, hogy azokban fogható-e a rádióadás?
 $A(-8; -4)$, $B(0; 7)$, $C(-10; 0)$, $D(10; 8)$, $E(16; 2)$, $F(16; -2)$, $G(-2; -16)$.
-  **3.** Írd fel annak a körnek az egyenletét, amelyik az $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 20$ körrel koncentrikus, és
 a) kétszer akkora sugarú; b) áthalad az $A(3; -5)$ ponton!
-  **4.** Írd fel az ábrán látható négyzetekbe, illetve körjük írható körök egyenleteit!



-  **5.** Egy négyzet három oldalegyenesének egyenlete: $y = -5$; $y = 7$; $x = 3$.
 a) Írd fel a négyzet csúcsainak koordinátáit!
 b) Írd fel a négyzetbe írható kör egyenletét!
 c) Írd fel a négyzet köré írható kör egyenletét!
- 6.** Írd fel annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja a C pont, és érinti az e egyenest!
 a) $C(0; 0)$, $e: y = -6$;  b) $C(-1; 2)$, $e: x = 3$;
 c) $C(3; -2)$, $e: 4x - 3y = -7$;  d) $C(6; -4)$, $e: 3x - 4y = -16$.

A kör egyenletének különböző alakjai

A kör egyenletét az előzőektől eltérő algebrai alakban is felírhatjuk. Például az $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 9$ kör egyenlete felírható a négyzetre emelés elvégzése és rendezés után az $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 20 = 0$ alakban is. Az egyenlet az algebrai átalakítások után is ugyanannak a körnek az egyenlete. Például:

$$3x^2 + 3y^2 - 12x + 30y + 60 = 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 2x + 5y + 10 = 0$$

Szokás az ilyen módon megadott köregyenletet a kör általános egyenletének nevezni.

Mintapélda₄

Párosítsuk össze az ugyanazt a kört leíró köregyenleteket!

A. $(x+4)^2 + y^2 = 25$

1. $9x^2 + 9y^2 + 30x + 36y - 47 = 0$

B. $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$

2. $2x^2 + 2y^2 - 32x - 20y - 22 = 0$

C. $\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + (y+2)^2 = 12$

3. $4x^2 + 4y^2 - 4y - 3 = 0$

D. $(x-8)^2 + (y-5)^2 = 100$

4. $x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0$

Megoldás:

Elvégezzük a hatványozást és megvizsgáljuk, kell-e az eredményként kapott kifejezést tovább alakítani, hogy megegyezzen a jobb oldali oszlop valamelyik kifejezésével.

$$(x+4)^2 + y^2 = 25 \Rightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 = 25 \xrightarrow{-25} x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0;$$

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot y + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - y - \frac{3}{4} = 0 \quad / \cdot 4$$

$$4x^2 + 4y^2 - 4y - 3 = 0;$$

$$\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + (y+2)^2 = 12 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{5}{3} \cdot x + \frac{25}{9} + y^2 + 4y + 4 = 12 \quad / - 12$$

$$x^2 + y^2 + \frac{10}{3}x + 4y - \frac{47}{9} = 0 \quad / \cdot 9$$

$$9x^2 + 9y^2 + 30x + 36y - 47 = 0;$$

$$\begin{aligned}
 (x-8)^2 + (y-5)^2 = 100 &\Rightarrow x^2 - 16x + 64 + y^2 - 10y + 25 = 100 \quad /-100 \\
 x^2 + y^2 - 16x - 10y - 11 &= 0 \quad /\cdot 2 \\
 2x^2 + 2y^2 - 32x - 20y - 22 &= 0.
 \end{aligned}$$

Így az egymásnak megfelelő párok: A – 4; B – 3; C – 1; D – 2.

Észrevehetjük, hogy a kör egyenlete kétismeretlenes, másodfokú egyenlet, de nem minden kétismeretlenes másodfokú egyenlet kör egyenlete. Tudnunk kell eldönteni egy másodfokú, kétismeretlenes egyenletről, hogy az köregyenlet-e vagy sem, és a köregyenletből tudnunk kell meghatározni a kör középpontját és sugarát.

A kör egyenletének általános alakja: $Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$, ahol $A \neq 0$. Vegyük észre, hogy ebben az egyenletben az x^2 és y^2 tag együtthatója egyenlő, és nincs benne xy -os tag. Csak az ilyen alakú egyenlet lehet kör egyenlete!

Mintapélda,

Határozzuk meg a következő körök középpontját és sugarát!

- a) $x^2 + y^2 + 10x - 6y - 15 = 0$; b) $2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$;
 c) $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 21 = 0$; d) $x^2 - 7x + y^2 + 2y + 13,25 = 0$.

Megoldás:

Az egyenlet bal oldalán teljes négyzetet tartalmazó kifejezéseket alakítunk ki.

- a) $x^2 + y^2 + 10x - 6y - 15$ kifejezésben $x^2 + 10x$ az $(x+5)^2$ kifejezésben található, hiszen

$$(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25. \text{ Hasonlóan: } y^2 - 6y \text{ az } (y-3)^2 \text{ kifejezés része:}$$

$$(y-3)^2 = y^2 - 6y + 9. \text{ Ennek megfelelően az egyenlet bal oldalát átalakítjuk:}$$

$$x^2 + y^2 + 10x - 6y - 15 = 0 \Rightarrow (x+5)^2 - 25 + (y-3)^2 - 9 - 15 = 0 \quad /+ 49$$

$$\text{Átrendezve:} \quad (x+5)^2 + (y-3)^2 = 49$$

$$\text{A kör egyenlete:} \quad (x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

Ezeket összehasonlítva $u = -5$, $v = 3$ és $r^2 = 49$ adódik, ahonnan a kör középpontja

$C(-5; 3)$, sugara 7 egység.

b) A teljes négyzetté kiegészítés előtt az egyenletet 2-vel osztjuk, hogy az x^2 és az y^2 kifejezések együtthatója 1 legyen. Elvégezzük a teljes négyzetté alakítást:

$$x^2 + y^2 - x - y - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

A köregyenlettel ezt összevetve, a középpont: $C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, a sugár 1 egység.

c) Elvégezzük a teljes négyzetté kiegészítéseket:

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y + 21 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 - 4 + (y + 1)^2 - 1 + 21 = 0$$

$$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = -16$$

-16 nem lehet egy valós szám négyzete (így a sugáré sem), ezért az egyenlet nem köregyenlet. (Egy „üres alakzat” egyenlete.)

d) Átalakítás után $x^2 - 7x + y^2 + 2y + 13,25 = (x - 3,5)^2 - 3,5^2 + (y + 1)^2 - 1 + 13,25 =$
 $= (x - 3,5)^2 + (y + 1)^2 - 13,25 + 13,25 = (x - 3,5)^2 + (y + 1)^2$, vagyis $(x - 3,5)^2 + (y + 1)^2 = 0$.
 Ez azt jelenti, hogy a „kör” sugara nulla: csak a (3,5; -1) koordinátájú pont elégíti ki az egyenletet.

Mintapélda₆

Válasszuk ki az alábbi egyenletekből a köregyenleteket!

- a) $x^2 + y^2 - 10x + 19 = 0$; b) $8x^2 + 8y^2 - 4x + 12y + 9 = 0$;
 c) $x^2 - y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$; d) $2x^2 + 2y^2 + 24x + 32y = 0$.

Megoldás:

- a) $(x - 5)^2 + y^2 = 6$, köregyenlet; b) $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{1}{2}$, nem köregyenlet;
 c) nem köregyenlet; d) $(x + 6)^2 + (y + 8)^2 = 100$, köregyenlet.

Feladatok

 7. Melyik köregyenlethez melyik középpont tartozik?

A. $(x-6)^2 + (y+2)^2 = 10$;

B. $x^2 + y^2 + 5x - 5y + 0,5 = 0$;

C. $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 2 = 0$;

D. $x^2 + y^2 - 7x - 3y = 0$;

1. $(-2,5; 2,5)$;

2. $(-3; 1)$;

3. $(6; -2)$;

4. $\left(\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

 8. Melyik pont nem lesz egyik körnek sem a középpontja?

A. $x^2 + y^2 - 16x - 10y - 11 = 0$;

B. $x^2 + y^2 + 3y - 10 = 0$;

C. $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$;

D. $9x^2 + 9y^2 - 6x - 1 = 0$;

1. $(0; -1,5)$;

2. $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$;

3. $(8; 5)$;

4. $(2; -2)$.

 9. Határozd meg a következő egyenletekkel megadott körök középpontját, sugarát!

a) $x^2 + y^2 - 24x - 6y + 89 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + 2,5x + 5y + 3,8125 = 0$;

c) $4x^2 + 4y^2 + 8x - 8y - 1 = 0$;

d) $3x^2 + 4x + 3y^2 - 8y = 0$.


 10. Ábrázold a koordináta-rendszerben a következő egyenletekkel megadott köröket!

a) $x^2 + y^2 - 4x + 3y = 0$;

b) $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0$

c) $25x^2 + 25y^2 + 20x + 160y + 196 = 0$;

d) $20x^2 + 20y^2 - 220x - 140y - 595 = 0$.


 11. A k kör két pontja $A(2; -1)$ és $B(6; 7)$, és középpontja illeszkedik a $2y = x + 6$ egyenesre. Válaszd ki, hogy a következő egyenletek közül melyik lehet k egyenlete!



A. $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6 = 0$;

B. $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 6 = 0$;

C. $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$;

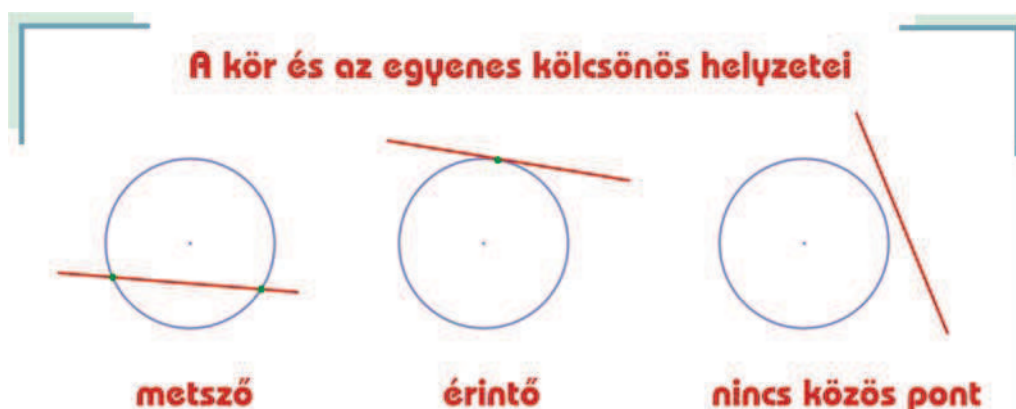
D. $2x^2 + 2y^2 - 8x + 16y + 5 = 0$.

 12. Írd fel annak a körnek az egyenletét, amelynek érintője az $y = 4$ egyenes, azon az érintési pont a $P(5; 4)$ pont, és a sugara 7 egység. Az egyenletet összeg alakban add meg!

-  **13.** Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely felezi a $x^2 + y^2 + 10x + 14y + 14 = 0$ egyenletű kör területét, és illeszkedik az $A(2; 5)$ pontra!
-  **14.** Az ABC háromszög átfogójának két végpontja: A és B . A harmadik csúcsról tudjuk, hogy valamelyik koordinátatengelyre illeszkedik. Határozd meg a háromszög harmadik csúcsát! (Ügyelj a megoldások számára is!)
- a) $A(-7; -7), B(1; -1);$ b) $A(-2; 6), B(14; -6);$
c) $A(-5; 2), B(-5; -6);$ d) $A(2; -6), B(6; 2).$

II. A kör és az egyenes

A kör és az egyenes kölcsönös helyzete



Az egyenesek metszéspontját a koordináta-rendszerben úgy határoztuk meg, hogy megoldottuk az egyenleteikből álló egyenletrendszert. Akkor említettük, hogy ez a módszer általános esetben, bármely két alakzat metszéspontjának kiszámításához, így kör és egyenes esetében is használható.

Egy kör és egy egyenes metszéspontját úgy határozzuk meg, hogy megoldjuk az egyenleteikből álló egyenletrendszert.

Természetesen ennek a másodfokú, kétismeretlenes egyenletrendszernek nincs mindig megoldása. A megoldás során az is kiderül, hogy milyen a kör és az egyenes kölcsönös helyzete. Ha az egyenletrendszernek nincs megoldása, akkor az egyenesnek és a körnek nincs közös pontja, egy megoldás esetén érintő, két megoldás esetén metsző az egyenes.

Mintapélda₇

Határozzuk meg az $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 20$ és az $y+2x=-5$ egyenes közös pontjainak számát!

Megoldás:

Megoldjuk a két egyenletből álló egyenletrendszert, pl. behelyettesítő módszerrel. Az egyenes egyenletéből $y = -2x - 5$, így a $(-2x - 5)$ kifejezést y helyére a köregyenletbe behelyettesítjük:

$$(x-2)^2 + [(-2x-5)+5]^2 = 20 \Rightarrow (x-2)^2 + (-2x)^2 = 20, \text{ a négyzetre emelések után:}$$

$$x^2 - 4x + 4 + 4x^2 = 20 \Rightarrow 5x^2 - 4x - 16 = 0 \text{ másodfokú egyenlet adódik.}$$

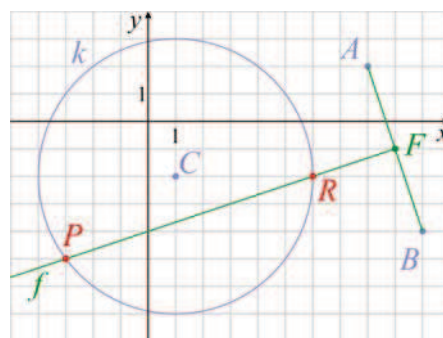
A metszéspontok száma attól függ, hogy ennek a másodfokú egyenletnek hány megoldása van. A megoldások számát a diszkrimináns dönti el: $D = (-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-16) = 336$. Mivel a diszkrimináns pozitív, az egyenletnek két megoldása van, vagyis az egyenes (két pontban) metszi a kört.

Mintapélda₈

Az $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$ egyenletű körnek mely pontjai vannak egyenlő távolságra az $A(8; 2)$ és a $B(10; -4)$ pontoktól?

Megoldás:

A keresett pontok az AB szakasz felezőmerőlegesének és a körnek a metszéspontjai. A szakasz felezőpontja $F(9; -1)$, f normálvektora az $\overrightarrow{AB}(2; -6)$. A felezőmerőleges egyenes egyenlete: $f: y = \frac{1}{3}x - 4$.



A kör és f metszéspontjának kiszámításához az f egyenletéből és a kör egyenletéből álló egyenletrendszert kell megoldani. Célszerű az egyenes egyenletéből x -et kifejezni, mert így egész együtthatókkal számolhatunk: $f: 3y = x - 12 \Rightarrow x = 3y + 12$.

Ezt beírjuk a kör egyenletébe:

$$(3y+12-1)^2 + (y+2)^2 = 25 \Rightarrow (3y+11)^2 + (y+2)^2 = 25. \text{ Négyzetre emelés és rendezés következik, majd megoldjuk a kapott másodfokú egyenletet:}$$

$$9y^2 + 66y + 121 + y^2 + 4y + 4 - 25 = 0 \Rightarrow 10y^2 + 70y + 100 = 0 \quad / :10$$








$$y^2 + 7y + 10 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2} = \frac{-7 \pm 3}{2} \Rightarrow y_1 = -5; y_2 = -2. \text{ Két metszéspontot kaptunk.}$$

Mindkettőhöz kiszámítjuk a hiányzó abszcisszát: $x_1 = 3 \cdot (-5) + 12 = -3$, illetve

$x_2 = 3 \cdot (-2) + 12 = 6$. A keresett pontok: $(-3; -5)$ és $(6; -2)$.

Feladatok

-  **15.** Határozd meg a kör és egyenes kölcsönös helyzetét az alábbi feladatokban! Ha az egyenes metsző vagy érintő, akkor határozd meg az érintési, illetve a metszéspontokat is!
- a) $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 25$ és $y = x + 2$;
 - b) $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 100$ és $x = -7$;
 - c) $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$ és $y = x - 4$;
 - d) $(x-6)^2 + (y+9)^2 = 169$ és $2x + 3y = 11$.
-  **16.** Egy kör áthalad az $(1; 2)$ ponton, és egyik érintőjének egyenlete az $e: y = 10$. Az e egyenes -3 abszcisszájú pontja az érintési pont. Írd fel a kör általános egyenletét (az egyenlet nem tartalmaz teljes négyzetet)!
-  **17.** Egy kör áthalad a $(6; -11)$ ponton, és egyik érintőjének egyenlete $e: 3x + 4y = 24$. Az e egyenes 3 ordinátájú pontja az érintési pont. Írd fel a kör általános egyenletét!
-  **18.** Egy egyenlőszárú háromszög alapjának két csúcsa A és B , az alaphoz tartozó magasságvonal hossza m egység. Határozd meg a háromszög harmadik csúcsának koordinátáit!
- a) $A(1; 3)$, $B(-3; -3)$, $m = \sqrt{52}$; b) $A(-3; 5)$, $B(3; -1)$, $m = 2\sqrt{2}$.
-  **19.** Egy rombusz egyik átlójának végpontjai: A és C . A másik átló hossza d egység. Határozd meg a másik két csúcs koordinátáit!
- a) $A(-5; 2)$, $C(7; -4)$, $d = 4\sqrt{5}$; b) $A(-5; 4)$, $C(7; -5)$, $d = 10$.
-  **20.** A derékszögű háromszög egyik befogójának csúcsai: $(0; 5)$ és $(4, -3)$, a köré írt kör sugara $2\sqrt{10}$ egység. Határozd meg a háromszög hiányzó csúcsát!
-  **21.** Egy egyenlőszárú háromszög alapjának két csúcsa $A(2; 5)$ és $B(10; 1)$, a harmadik csúcs az $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 90 = 0$ egyenletű körön található.
- a) Melyek a háromszög harmadik csúcsának koordinátái?
 - b) Határozd meg a háromszög(ek) súlypontját!
 - c) Határozd meg a háromszög alapjának hosszát!
 - d) Mekkora a háromszög(ek) területe?

22. Határozd meg, hogy mekkora területű körszeleteket vág le az $x^2 + y^2 = 100$ egyenletű körből a $2y = x - 10$ egyenletű egyenes!

A kör érintője

Egyes körrel kapcsolatos koordinátageometriai feladatokban bonyolult lenne visszavezetni a megoldást az elemi geometriában megtanult ismereteinkre, ezért ilyen esetekben ezt nem is érdemes megpróbálni.

Mintapélda,

Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelyik érinti mindkét koordinátatengelyt, és áthalad az $(1, -8)$ ponton!

Megoldás:

Kiindulunk az $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$ köregyenletből és abból, hogy a keresett kör – elhelyezkedése következtében – milyen kapcsolatok találhatók az ismeretlen u , v és r között.

A vázlat elkészítése után leolvashatók a következő összefüggések:

$$u = r \quad \text{és} \quad v = -r \quad (\text{hiszen } r > 0, \text{ de } v < 0)$$

Ezeket a köregyenletbe helyettesítve az az

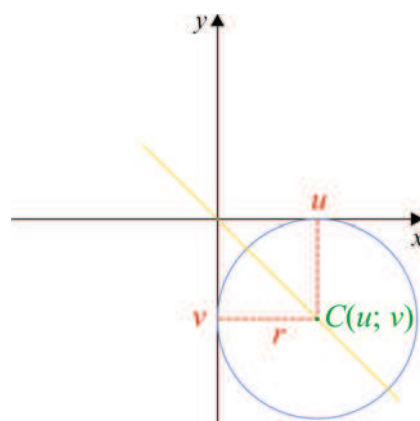
$$(x-r)^2 + (y+r)^2 = r^2 \quad \text{egyenletre egyszerűsödik.}$$

Mivel a megadott pont illeszkedik a körre, koordinátáit behelyettesítve igazgá válik a kör egyenlete: $(1-r)^2 + (-8+r)^2 = r^2$. ebben már csak r az ismeretlen, vagyis r -re másodfokú egyenletet kapunk. Elvégezzük a négyzetreemelést és az összevonást:

$$\begin{aligned} 1 - 2r + r^2 + 64 - 16r + r^2 &= r^2 \quad / -r^2 \\ r^2 - 18r + 65 &= 0 \end{aligned}$$





$$r_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 65}}{2} = \frac{18 \pm 8}{2} \Rightarrow \begin{aligned} r_1 &= 13 \\ r_2 &= 5 \end{aligned}$$

A megoldások: $(x-13)^2 + (y+13)^2 = 169$ és $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$.



A megoldás során a köregyenletet egyszerűsítettük mindaddig, amíg egyetlen ismeretlent tartalmazó egyenletet kaptunk. A következőkben is ezt a módszert követjük a feladatok megoldása során.

Feladatok

-  **23.** Írd fel annak a körnek az egyenletét, amelyik érinti mindkét koordinátatengelyt, és áthalad az a) $A(8; 1)$; b) $B(-4; 2)$; c) $C(-8; -9)$ ponton!
-  **24.** Írd fel annak a körnek az egyenletét, amelyik áthalad az $(1; 2)$ ponton, a sugara 5 egység, és érinti az a) x tengelyt; b) y tengelyt!
-  **25.** Írd fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a $(3, -4)$ ponton, középpontja az $y = 2x$ egyenesre illeszkedik, és érinti az x tengelyt!
-  **26.** Írd fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a $(6, 2)$ ponton, középpontja az $y = 2x + 1$ egyenesre illeszkedik, és érinti az x tengelyt!

Mintapélda₁₀

Írjuk fel az $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$ egyenletű körnek az $(1, 4)$ pontra illeszkedő érintőjét!

Megoldás:

Jelölje P az $(1, 4)$ pontot! Behelyettesítéssel ellenőrizzük, hogy a P illeszkedik-e a körre:

$$(1 + 3)^2 + (4 - 1)^2 = 16 + 9 = 25, \text{ vagyis } P \text{ a körvonal egy}$$

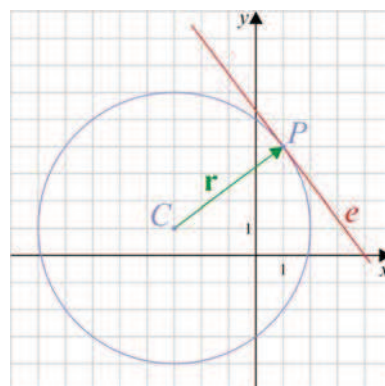
pontja.

A kör középpontja: $C(-3; 1)$, sugara 5 egység. Elkészítjük a vázlatot, berajzoljuk az érintőt, valamint az érintési pontba húzott sugár vektorát ($\mathbf{r} = \overrightarrow{CP}$).

Az érintő merőleges a sugárra, ezért \mathbf{r} az érintő normálvektora. $\mathbf{r} = \overrightarrow{CP}(p_1 - c_1; p_2 - c_2) \Rightarrow \mathbf{r}(4; 3)$.

$$e: \begin{cases} \mathbf{n}(4; 3) \\ P(1; 4) \end{cases} \quad \begin{aligned} Ax + By &= Ax_0 + By_0 \\ 4x + 3y &= 4 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \end{aligned}$$


Az érintő egyenlete $e: 4x + 3y = 16$.





Feladatok


 27. Írd fel a k kör P pontjába húzható érintőjének egyenletét!

- a) $k : (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$, $P(5; 1)$;
- b) $k : (x-1)^2 + (y-3)^2 = 100$, $P(-7; -3)$;
- c) $k : x^2 + y^2 + 8x + 12y - 117 = 0$, $P(8; -1)$;
- d) $k : x^2 + y^2 + 8x - 14y - 35 = 0$, $P(4; 1)$.










 28. Írd fel az $x^2 + y^2 = 169$ egyenletű kör 5 abszcisszájú pontjaiba húzható érintők egyenletét!

 29. Írd fel az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kör $3x + 4y = 0$ egyenletű egyenessel párhuzamos érintőinek egyenletét!








 30. Határozd meg az $x^2 + y^2 = 16$ egyenletű körnek azokat az érintőit, amelyek a $P(-10; 4)$ ponton haladnak keresztül.

 31. Határozd meg az $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 9$ egyenletű körnek azokat az érintőit, amelyek a $P(2; -5)$ ponton haladnak keresztül.

Vegyes feladatok

-  **32.** Adott az $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 36$ egyenletű kör.
- a) Döntsd el az alábbi pontokról, hogy a kör belső vagy külső pontjai, vagy a körvonalra illeszkednek-e: $A(-1; 1)$, $B(7; -3)$, $C(-2; 5)$!
- b) Add meg a körnek azokat a pontjait, amelyek abszcisszája 4!
-  **33.** Mekkora a sugara annak a körnek, amely az $x^2 + y^2 + 14x - 6y + 42 = 0$ egyenletű körrel koncentrikus, és átmegy a $P(-1; 3)$ ponton?
-  **34.** Egy négyzet szemközti csúcsai: $A(-5; -3)$ és $C(9; 5)$. Írd fel a négyzet köré írható kör egyenletét!
-  **35.** Egy négyzet szomszédos csúcsai: $A(-3; -2)$ és $B(5; 0)$. Írd fel a négyzet köré írható kör egyenletét! Ügyelj a megoldások számára!
-  **36.** Írd fel az ábrán látható kör és egyenes egyenletét, majd számítással határozd meg a metszéspontjukat!
-  **37.** Írd fel annak a körnek az általános egyenletét, amelynek érintője az $x = 5$ egyenletű egyenes, a sugara 6 egység és középpontja illeszkedik az $3y + x = 8$ egyenletű egyenesre!
-  **38.** Egy téglalap rövidebb oldalának csúcsai $A(2; -2)$ és $B(-2; 0)$. A hosszabb oldal hossza a rövidebb oldal hosszának másfélszerese. Határozd meg a téglalap köré írható kör egyenletét!
-  **39.** Milyen messze van az $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 9 = 0$ egyenletű kör középpontja a $3x + 2y = 8$ egyenletű egyenestől?
-  **40.** Egy derékszögű háromszög egyik befogójának végpontjai $A(-1; -2)$ és $C(1; 1)$, a másik befogó hossza AC hosszának háromszorosa. Írd fel a derékszögű háromszög köré írt körének egyenletét!

41. Egy derékszögű háromszög átfogójának egyik végpontja az $A(-5; 3)$ pont, derékszögű csúcsa a $C(4, 6)$. A háromszög harmadik csúcsa az x tengelyen van. Határozd meg a háromszög köré írható kör egyenletét!
42. Egy kör egyenlete $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 18,75 = 0$. Adott egy négyzet két szomszédos csúcsa: $A(-8; -5)$ és $B(-3; 6)$, és a négyzetnek van olyan pontja, amely az I. síknegyedben található. Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik a négyzetnek és a körnek is felezi a területét!
- $$y = \frac{2}{3}x - 2.$$
43. A derékszögű háromszög egyik befogójának csúcsai: $(2; 5)$ és $(4, -1)$, az átfogója $\sqrt{130}$ egység. Határozd meg a háromszög hiányzó csúcsának koordinátáit!
44. Egy háromszög csúcsai $A(-3; 9)$, $B(5; -7)$, $C(11; 11)$. Írd fel a háromszög köré írható kör egyenletét!
45. Egy számítógép monitorán olyan kört akarunk ábrázolni, amely három adott ponton halad keresztül. A pontok koordinátái: $A(542; 384)$, $B(611; 651)$, $C(905; 483)$. Határozd meg a három ponton áthaladó kör egyenletét! A monitoron a koordináta-rendszer kezdőpontját a bal alsó sarokhoz rögzítjük.
46. A $PQRS$ négyszög csúcsai: $P(3; -1)$, $Q(1; 3)$, $R(-6; 2)$ és $S(-5; -5)$. Igaz-e, hogy a $PQRS$ négyszög húrnégyszög?
47. Írd fel annak a körnek az egyenletét, amely az $e: y + 2x = -1$ egyenest az $E(-2; 3)$ pontban érinti, és sugara $\sqrt{45}$ egység!
48. Írd fel az $x^2 + y^2 + 12x + 16y = 0$ egyenletű kör -2 ordinátájú pontjaiba húzható érintők egyenletét!

-  **49.** Írd fel az $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$ egyenletű körnek azokat az érintőit, amelyek párhuzamosak az $e: y = \frac{4}{3}x$ egyenessel!
-  **50.** Írd fel az $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 75 = 0$ egyenletű körnek azokat az érintőit, amelyek merőlegesek a $3y + 4x = 0$ egyenesre!
-  **51.** Egy kör sugarának hossza 4, középpontja a $(-3; 5)$ pont. Írd fel a kör egyenletét!
-  **52.** Adott a síkon az $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 47 = 0$ egyenletű kör.
- a) Állapítsd meg, hogy az $A(7; 7)$ pont illeszkedik-e a körre!
 - b) Határozd meg a kör középpontjának koordinátáit és a kör sugarát!
 - c) Legyenek $A(7; 7)$ és $B(0; 0)$ egy egyenlő szárú háromszög alapjának végpontjai.
A háromszög C csúcsa rajta van az $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 47 = 0$ egyenletű körön.
Számítsd ki a C csúcs koordinátáit!
-  **53.** Tekintsük a koordináta-rendszerben adott $A(6; 9)$, $B(-5; 4)$ és $C(-2; 1)$ pontokat!
- a) Mekkora az AC szakasz hossza?
 - b) Írd fel az AB oldalegyenes egyenletét!
 - c) Igazold (számítással), hogy az ABC háromszög C csúcsánál derékszög van!
 - d) Írd fel az ABC háromszög körülírt körének egyenletét!
-  **54.** Egy négyzet oldalegyenesei a koordinátatengelyek és az $x=1$, valamint az $y=1$ egyenletű egyenesek.
- a) Ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben a négyzetet, és add meg csúcsainak koordinátáit!
 - b) Írd fel a négyzet köré írható kör egyenletét!
 - c) Állapítsd meg, hogy a négyzet kerülete hány százaléka a kör területének?
 - d) Az $y = -4x + 2$ egyenletű egyenes a négyzetet két részre bontja. Számítsd ki a részek területének arányát!
-  **55.** Írd fel annak a két egyenesnek az egyenletét, amelyek párhuzamosak a $3x - 4y = 0$ egyenletű egyenessel, és érintik az $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ egyenletű kört!

Kislexikon

Az origó középpontú, r sugarú kör egyenlete: $x^2 + y^2 = r^2$.

A $C(u; v)$ középpontú, r sugarú kör egyenlete: $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$.

A kör általános egyenlete: $Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$, ahol $A \neq 0$.