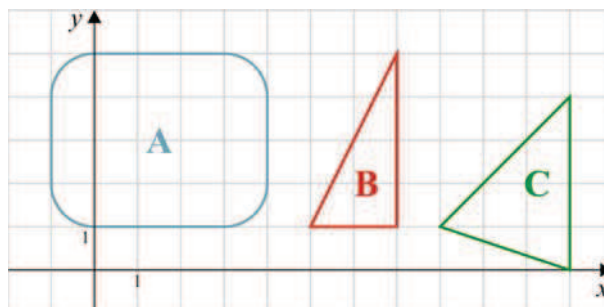


I. Ismétlés

Mintapélda₁

- Számítsuk ki a koordináta-rendszerbe berajzolt síkidomok kerületét és területét!
- Mekkorák a B háromszög szögei?
- Mekkorák a C háromszög szögei?
- Ha a B háromszöget eltoljuk a $(-4; 2)$ vektorral, mik lesznek az új háromszög csúcsainak koordinátái?



Megoldás:

$$a) T_A = 16 + \pi \approx 19,1; T_B = 4; T_C = 6 \text{ (kétféle megoldás: } T = \frac{a \cdot m}{2},$$

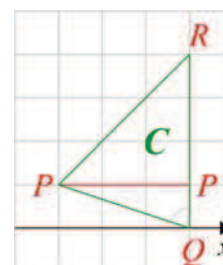
vagy téglalap területéből kivonjuk két derékszögű háromszög területét).

$$K_A = 10 + 2\pi \approx 16,3, K_B = 6 + 2\sqrt{5} \approx 10,5,$$

$$K_C = 4 + \sqrt{10} + 3\sqrt{2} \approx 11,4.$$

(A háromszögek nem tengelyekkel párhuzamos oldalait Pitagorasz-tétellel számítjuk ki.)

- tangens szögfüggvénnyel: $63,4^\circ$, 90° és $26,6^\circ$.
- tangens szögfüggvénnyel: $63,4^\circ$, 45° és $71,6^\circ$. ($PP'Q$ és $PP'R$ háromszögből.)
- $(1; 3)$, $(3; 3)$, $(2; 7)$.



Az irányított szakaszt **vektornak** nevezzük. A fizikában több vektormennyiséget megismerünk: elmozdulás, sebesség, gyorsulás, erő stb.

A vektorok kezdőpontjukkal és végpontjukkal kijelölnek egy irányt és egy távolságot. A távolságot a vektor hosszának vagy **abszolútértékének** nevezzük, és mindig valamilyen hosszúságegységhez viszonyítjuk.

A vektorok *egyenlősége* és *azonossága* különböző fogalmak. Két vektor **azonos**, ha kezdőpontjaik és végpontjaik páronként megegyeznek, jelölés: $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}$. Egy adott vektorral azonos vektor a síkon vagy a térben ugyanott helyezkedik el. Ezzel szemben egy adott vektorral egyenlő vektort a sík vagy tér bármely pontjából felmérhetünk, így egy adott vektorral egyen-

lő vektorból végtelen sok van. Két vektor **egyenlő**, ha hosszuk és irányuk megegyezik (vagyis egyeneseik párhuzamosak és irányításuk azonos).

Az ábra jelöléseivel:

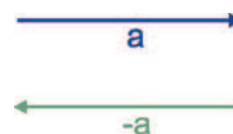
$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$$



Egységvektor (e): egységnyi hosszúságú vektor: $|\mathbf{e}| = 1$.

Nullvektor (0): 0 hosszúságú vektor. Definíciója: olyan vektor, amelynek megegyezik a kezdőpontja és a végpontja. Irányát tetszőlegesnek tekintjük.

Az **a** vektor **ellentettjének** nevezzük azt a vektort, amelyik vele egyenlő abszolútértékű, vele párhuzamos, de ellentétes irányú. Jelölése: $-\mathbf{a}$.



Ha egy vektor a koordináta-rendszer kezdőpontjából indul ki, azt **helyvektornak** nevezzük. A nem origó kezdőpontú vektorok a **szabad vektorok**.

Mintapélda₂

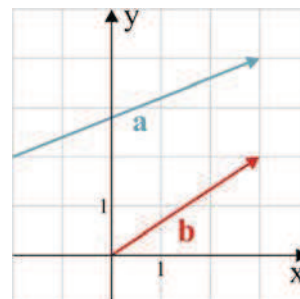
Számítsuk ki az ábrán látható vektorok abszolútértékét!

Megoldás:

A koordináta-rendszer derékszögű négyzetrácsa és a Pitagorasz-tétel segítségével végezzük a számítást:

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \approx 3,6 \text{ egység.}$$

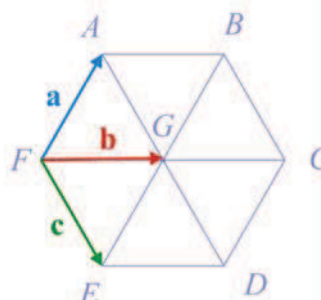
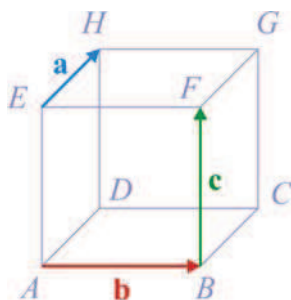
$$\text{Hasonlóan számítva: } |\mathbf{a}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} \approx 5,4 \text{ egység.}$$



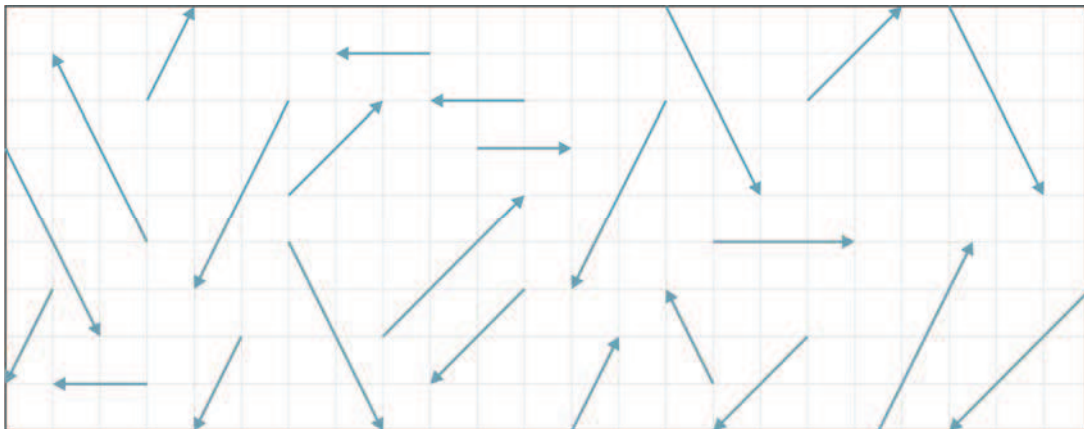
Feladatok



1. Keress egyenlő, ellentett és azonos vektorokat a kockán és a szabályos hatszögön!



 2. Keress az ábrán egyenlő, egyenlő abszolútértékű, illetve ellentett vektorokat!

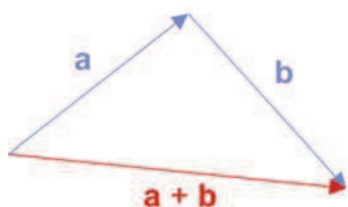


Vektorműveletek

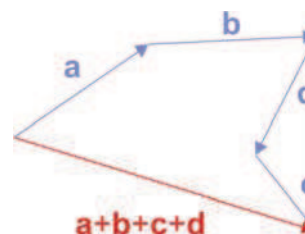
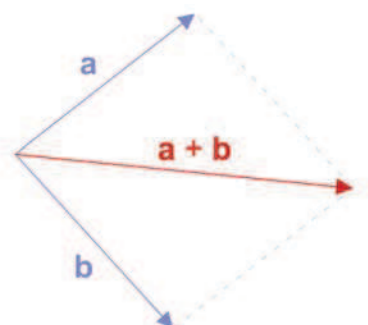
Két vektor összegét kétféle módszer szerint szerkeszthetjük meg:

- háromszög módszer:** az **a** végpontjából mérjük fel a **b** vektort; ekkor az **a + b** vektor az **a** kezdőpontjából a **b** végpontjába mutat.
- paralelogramma módszer:** ha **a** és **b** nem párhuzamosak, akkor az **a** és **b** vektorokat közös kezdőpontból mérjük fel, kiegészítjük paralelogrammává; ekkor az **a + b** vektor a paralelogramma közös kezdőpontból kiinduló átló vektora.

Háromszög módszer



Paralelogramma módszer



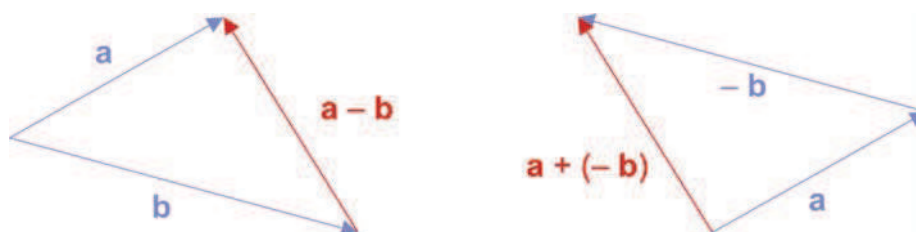
Több vektor összeadásánál használható a **láncszabály**:

Egy **a** vektor és a nullvektor összege az **a** vektorral egyenlő: $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$.

A vektorok összeadása a számokkal végzett összeadáshoz hasonlóan kommutatív (felcserélhető) és asszociatív (csoportosítható) művelet:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \text{ és } \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

A vektorok összeadásának ellentett művelete a vektorok kivonása. Az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok különbségét úgy képezzük, hogy közös kezdőpontból mérjük fel őket. A végpontjaikat összekötő, \mathbf{a} végpontja felé mutató vektor az $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ vektor. Az $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ vektort úgy is megszerkeszthetjük, hogy az \mathbf{a} vektorhoz hozzáadjuk \mathbf{b} ellentett vektorát ($-\mathbf{b}$ vektort).

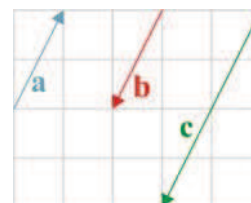


A vektorok kivonására a számok kivonásához hasonlóan nem teljesül sem a kommutativitás, sem az asszociativitás.

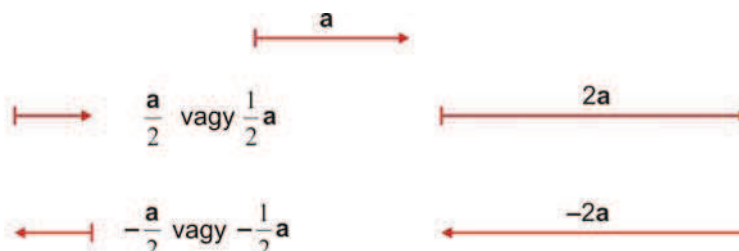
A vektorok nyújtására és zsugorítására a számmal (skalárral) történő szorzást használjuk.

Az ábrán az \mathbf{a} , \mathbf{b} és \mathbf{c} vektorok között összefüggések állapíthatók meg:

$\mathbf{b} = -\mathbf{a}$ ellentett vektorok, írhatjuk úgy is, hogy $\mathbf{b} = -1 \cdot \mathbf{a}$;
 $\mathbf{c} = 2\mathbf{b}$, valamint
 $\mathbf{c} = 2 \cdot (-\mathbf{a}) = -2 \cdot \mathbf{a}$.



További példák vektorok számmal való szorzására:



Az **\mathbf{a} vektor k -szorosa** ($k \in \mathbf{R}$, vagyis k egy valós szám) az \mathbf{a} vektor, amelynek hossza $|k| \cdot |\mathbf{a}|$, iránya pedig $k > 0$ esetén \mathbf{a} irányával megegyező, $k < 0$ esetén \mathbf{a} irányával ellentétes, $k = 0$ esetén pedig nullvektort kapunk.

1-nél nagyobb abszolútértékű számmal megszorozva a vektort a hossza növekszik (nyújtás). Ha a szám abszolútértéke 0 és 1 közé esik, akkor a vektort vele megszorozva a vektor hossza csökken (zsugorítás). A csupán szorzótényezőjükben különböző vektorokat egyneműeknek tekintjük, így azok összevonhatók: például $\mathbf{a} + 2\mathbf{a} = 3\mathbf{a}$.

A vektorok összeadását és számmal való szorzását használjuk egy vektor összetevőkre bontásakor is. Ez a koordináta-rendszerben egyszerű, mert az x és y tengely egységvektorai (\mathbf{i} és \mathbf{j}) jelölik ki azokat az összetevőket, amelyekre a vektorokat bontjuk.

II. Vektorkoordináták, vektorműveletek

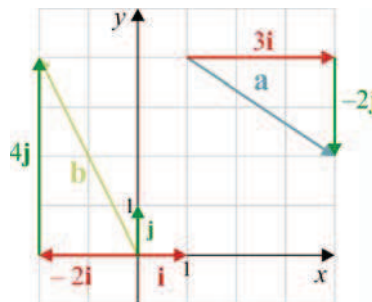
Mintapélda₃

Bontsuk fel az ábrán szereplő vektorokat az \mathbf{i} és \mathbf{j} egységvektorok segítségével olyan összevőkre, amelyek az x és y tengellyel párhuzamosak!

Megoldás:

Az ábra helyvektorát felbonthatjuk egy $-2\mathbf{i}$ és egy $4\mathbf{j}$ nagyságú vektor összegére: $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

Hasonlóan írható fel a szabad vektor is: $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + (-2\mathbf{j})$, röviden $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.



Ha a koordináta-rendszerben egy vektort az \mathbf{i} és a \mathbf{j} vektorok segítségével bontunk fel, akkor megkapjuk a vektor **lineáris kombinációját**, a $\mathbf{v} = v_1 \cdot \mathbf{i} + v_2 \cdot \mathbf{j}$ alakú felírást. A v_1 és v_2 számokat, vagyis \mathbf{i} és \mathbf{j} vektorok szorzóit a \mathbf{v} vektor koordinátáinak nevezzük: $\mathbf{v} (v_1; v_2)$.

A mintapéldában az \mathbf{a} vektor első koordinátája 3, második -2 , amit így jelölünk: $\mathbf{a} (3; -2)$.
 \mathbf{b} koordinátái: $\mathbf{b} (-2; -4)$.

Megjegyzés: A pontok és vektorok koordinátáit rendezett számpárnak is nevezik. Azért „rendezett”, mert ezeket nem cserélhetjük fel: az 1. koordináta az x , a 2. koordináta az y tengely irányában mért távolságokat jelentik. Térben szükség van még egy koordinátára, ezért rendezett számhármadról beszélünk. Ekkor a z tengelyhez kapcsolódik a vektor 3. koordinátája. Helyvektor esetén a vektorkoordináták megegyeznek a végpont koordinátaival.

Mintapélda₄

Adott egy négyszög négy csúcsa: $A(-4; -1)$, $B(-2; 4)$, $C(2; 4)$, $D(2; -3)$.

a) Határozzuk meg az oldalak vektorait!

b) Keressünk kapcsolatot a vektorkoordináták és a végpontok koordinátái között! Egészítsük ki a mondatot a megadott szavak felhasználásával (kötőszavakat, névelőket pótolhatsz)!

megfelelő kezdőpont végpont kivonjuk koordinátaiból koordinátáit

Adottak egy vektor kezdőpontjának és végpontjának koordinátái. A vektor koordinátáit megkapjuk, ha

c) Számítsuk ki az \overrightarrow{AB} vektor hosszát, és az A és C pontok távolságát!

Megoldás:

a) Leolvassuk az oldalvektorok koordinátáit:

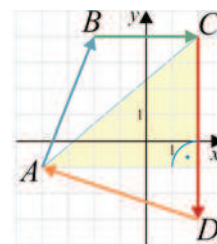
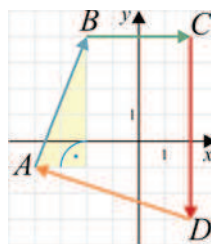
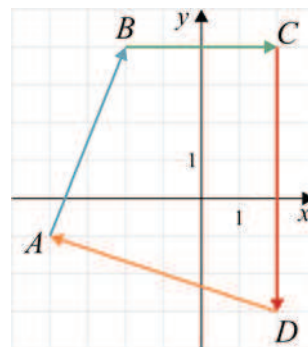
$$\overrightarrow{AB} (2;5), \overrightarrow{BC} (4;0), \overrightarrow{CD} (0;-7), \overrightarrow{DA}(-6;2).$$

b) A vektor koordinátáit megkapjuk, ha a végpont koordinátáiból kivonjuk a kezdőpont megfelelő koordinátáit.

c) Az $\overrightarrow{AB} (2;5)$ koordinátaiból számítjuk ki a hosszát, egy derékszögű háromszög segítségével:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \approx 5,4 \text{ egység, amit mérőszalaggal ellenőrizhetünk.}$$

Az $A(-4; -1)$ és $C(2; 4)$ pontok távolságának meghatározásához szintén derékszögű háromszöget használunk, amelynek oldalai: 6 és 5 egység, így a távolság $\sqrt{61} \approx 7,8$ egység.



Ha adott a vektor kezdőpontja: $A(a_1; a_2)$ és végpontja: $B(b_1; b_2)$, akkor a vektor koordinátáit úgy kapjuk meg, hogy a végpont koordinátaiból kivonjuk a kezdőpont megfelelő koordinátáit.

$$A(a_1; a_2), B(b_1; b_2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$$

A kezdőpontjával és végpontjával megadott vektor hosszát a megfelelő koordináták különbségéből számítjuk ki ugyanúgy, mint a két pont távolságát:

$$A(a_1; a_2), B(b_1; b_2) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

A koordinátaival megadott vektor hosszát a koordináták négyzetösszegének négyzetgyöke adja:

$$\mathbf{a}(a_1; a_2) \Rightarrow |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Mintapéllda,

Adott két vektor, \mathbf{a} (5; 3) és \mathbf{b} (6; -4). Rajzoljuk meg a következő vektorokat, és határozzuk meg a koordinátáikat: a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$; b) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$; c) $2\mathbf{a}$; d) $-0,5\mathbf{b}$.

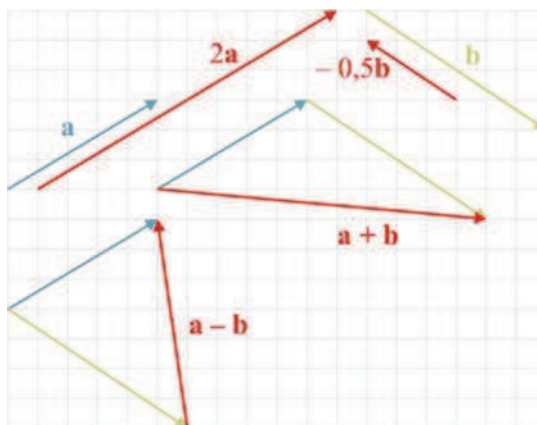
Megoldás:

a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (11; -1);

b) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ (-1; 7);

c) $2\mathbf{a}$ (10; 6);

d) $-0,5\mathbf{b}$ (-3; 2).



e) Keressünk összefüggéseket, és egészítsd ki a hiányzó mondatokat! Tegyük a helyükre a megadott szavakat! Kötőszavakat, névelőket pótolhatunk!

vektor megfelelő koordinátákat k -val összeadódnak megfelelő
koordináták egymásból szorozódnak kivonjuk koordinátái

Két vektor összeadásakor ...

Két vektor kivonásakor ...

Ha egy vektort megszorozunk egy k számmal, akkor ...

Megoldás:

Két vektor összeadásakor a megfelelő koordináták összeadódnak.

$$\mathbf{a} (a_1; a_2), \mathbf{b} (b_1; b_2) \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$$

Két vektor kivonásakor a megfelelő koordinátákat kivonjuk egymásból.

$$\mathbf{a} (a_1; a_2), \mathbf{b} (b_1; b_2) \Rightarrow \mathbf{a} - \mathbf{b} (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$$

Ha egy vektort megszorozunk egy k számmal, akkor a vektor koordinátái is k -val szorozódnak.

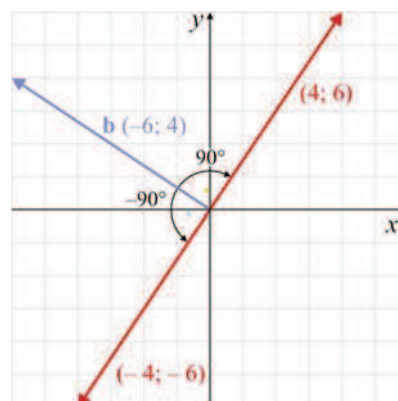
$$\mathbf{a} (a_1; a_2), k \in \mathbf{R} \Rightarrow k \cdot \mathbf{a} (k \cdot a_1; k \cdot a_2)$$

Mintapélda₆

Forgassuk el a $\mathbf{b}(-6; 4)$ vektort 90° -kal a kezdőpontja körül mindkét irányba, és olvassuk le a keletkezett vektorok koordinátáit!

Megoldás:

Az eredmény: $(4; 6)$ és $(-4; -6)$.



Általában is igaz, hogy ha egy vektort 90° -kal elforgatunk, akkor a koordinátái felcserélődnek, és az egyik (de csak az egyik!) előjelet vált.

$$\mathbf{a}(a_1; a_2) \xrightarrow{90^\circ} (a_2; -a_1), \text{ illetve } (-a_2; a_1)$$

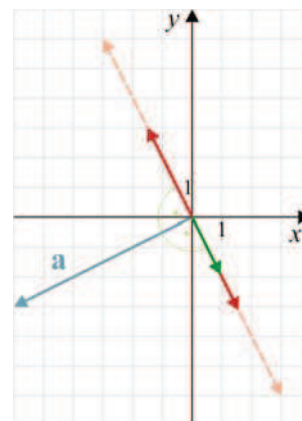
$+90^\circ$ -os forgatásnál $(-a_2; a_1)$, -90° -os forgatásnál $(a_2; -a_1)$ vektort kapunk.

Mintapélda₇

- Határozzuk meg annak a vektornak a koordinátáit, amelyik az $\mathbf{a}(-6; -3)$ vektorra merőleges, és hossza az \mathbf{a} hosszának a fele!
- Határozzuk meg annak a vektornak a koordinátáit, amelyik az $\mathbf{a}(-6; -3)$ vektorra merőleges, és y koordinátája -2 !

Megoldás:

- Két ilyen vektor is van, ui. az \mathbf{a} -t 90° -kal elforgatva két vektort kapunk: $(3; -6)$ és $(-3; 6)$. Fele akkora vektort a $0,5$ -tel való szorzás eredményez, így a keresett vektorok: $(1,5; -3)$ és $(-1,5; 3)$.
- Keressük azt az $(x; -2)$ vektort, amelyik párhuzamos a $(3; -6)$ vektorral. A második koordinátákat összevetve látható, hogy a $(3; -6)$ vektort harmadára kell zsugorítani, így a keresett vektor: $(1; -2)$. Szerkesztéssel ellenőrizzük!



Mintapélda₈

Adott az $\mathbf{a}(12; 8)$ és a $\mathbf{b}(-3; 5)$ vektor. Melyek a \mathbf{d} vektor koordinátái, ha az $\frac{\mathbf{a}}{2} + 4\mathbf{d} - \mathbf{b}$ vektorművelet eredménye nullvektor?

Megoldás:

A vektorműveleteket koordinátánként végezzük. A megfelelő koordináták összege nulla,

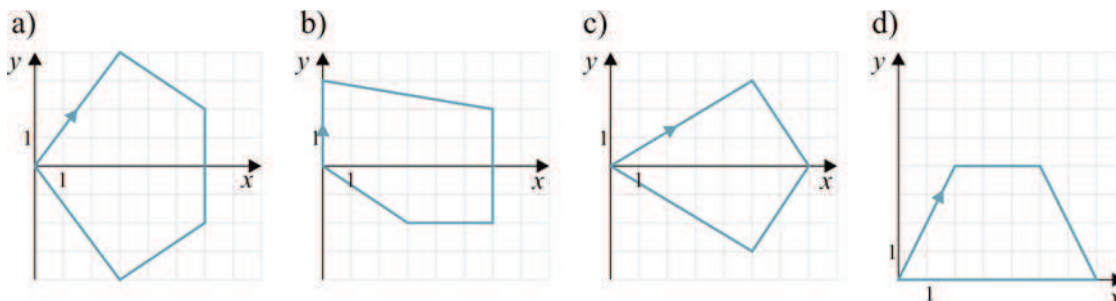
így $\frac{a_1}{2} + 4d_1 - b_1 = 0$, behelyettesítve: $\frac{12}{2} + 4d_1 + 3 = 0$, ahonnan $d_1 = -\frac{9}{4}$. Hasonlóan a

második koordinátákra: $\frac{a_2}{2} + 4d_2 - b_2 = 0$, ahonnan $\frac{8}{2} + 4d_2 - 5 = 0$, $d_2 = \frac{1}{4}$.

A keresett vektor: $\mathbf{d}\left(-\frac{9}{4}; \frac{1}{4}\right)$.


Feladatok

3. Egy régi hegesztőgép csak sokszögeket képes vágni, és vektorokkal kell megadni, hogy a vágás során mi legyen a következő mozgás. Írd le, hogy milyen vektorsorozattal írható le az ábrán látható síkidomok vágása!





4. A monitoron a koordináta-rendszer kezdőpontja a képernyő bal alsó sarka. A rajzoló teknőc helyzete $A(140; 220)$.
- Hová kerül a teknőc, ha $(100; -80)$ képpontvektorral elmozdul a képernyőn?
 - Határozd meg az új pontba mutató helyvektort!
5. A képernyő méretei a monitoron: 32 cm széles, és 24 cm magas, a monitor felbontása: 1024 x 768 képpont, a koordináta-rendszer kezdőpontja a bal alsó sarokban van. Gizi húzott egy szakaszt, amelynek kezdőpontja $(358; 690)$, végpontja $(870; 340)$.
- Hány képpont a vonal hossza?

b) Az egér mozgatásával a teljes képernyőt 4,5 cm oldalú, négyzet alakú területekkel lehet bekeretezni. Mennyi utat tett meg Gizi egere, mialatt a vonalat megrajzolta?


 6. Adott: $\mathbf{a}(-2; 4)$ és $\mathbf{b}(4; 4)$. Számítsd ki a következő vektorműveletek eredményét, és ábrázold a megoldást a koordináta-rendszerben! Határozd meg az eredményvektorok hosszát is!

a) $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$; b) $\frac{\mathbf{b}}{2} + 2\mathbf{a}$; c) $3\mathbf{a} - \frac{\mathbf{b}}{2}$; d) $\frac{2\mathbf{a} + \mathbf{b}}{4}$.


 7. Adott: $\mathbf{a}(2; -3)$ és $\mathbf{b}(4; 1)$. Számítsd ki a következő vektorműveletek eredményét, és ábrázold a megoldást a koordináta-rendszerben! Határozd meg az eredményvektorok hosszát is! a) $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$; b) $\frac{1}{3}\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{2}{3}\mathbf{a}$; c) $5\mathbf{a} - (4\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

 8. Adottak: $\mathbf{a}(10; 3)$, $\mathbf{b}(15; -5)$ és $\mathbf{c}(-4; -8)$. Melyek a \mathbf{d} vektor koordinátái, ha a megadott vektorok összege nullvektor?


a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$; b) $2\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{d} + \mathbf{c}$; c) $\frac{1}{2}\mathbf{c} - 2\mathbf{a} + 4\mathbf{d} + \frac{\mathbf{b}}{3}$;
d) $\frac{\mathbf{a} + 2\mathbf{d}}{4} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$.

 9. Rajzold meg az \overrightarrow{AB} vektort, ha $A(2; 3)$ és $B(5; -1)$! Rajzolj olyan vektorokat, amelyek egyenlőek \overrightarrow{AB} -vel és kezdőpontjuk

a) $C(3; 1)$; b) $D(0; -2)$; c) $E(-1; -4)$.

 10. Határozd meg annak a téglalapnak az oldalvektorait, amelynek egyik oldala kétszer akkora, mint a másik, és az egyik oldal csúcsai $(3; 3)$ és $(1; 6)$!

 11. Határozd meg a $(3; 4)$ vektorral párhuzamos egységvektor koordinátáit!

 12. Melyik az a vektor, amelyik az $(5, 12)$ vektorra merőleges, és hossza 20 egység!

Vektor felmérése adott pontból

Mintapélda,

Egy paralelogramma csúcsai: $A(-3; 4)$, $B(1; 6)$; $C(0; 3)$, $D(-4; 1)$.

- Határozzuk meg az \overrightarrow{AB} és a \overrightarrow{CD} oldalvektorokat!
- Milyen összefüggés van a paralelogramma szemközti oldalainak vektorai között?
- Egy, az $ABCD$ paralelogrammával egybevágó paralelogramma egyik csúcsa $D'(0; -2)$. Határozzuk meg a másik három csúcs koordinátáit!

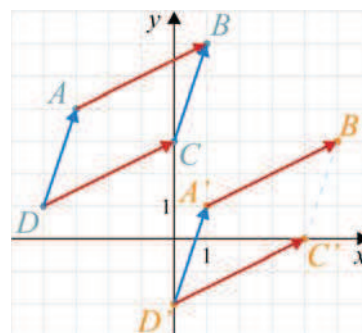
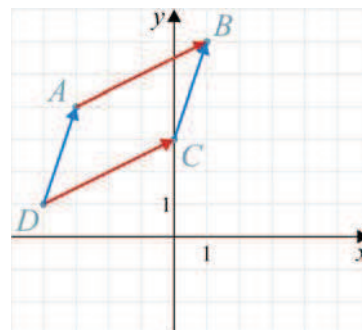
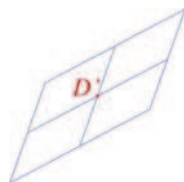
Megoldás:

- Mindkettő $(4; 2)$ vagy $(-4; -2)$.
- A szemközti oldalvektorok egyenlők vagy ellentettek.
- D' -ből felmérjük a $\overrightarrow{DA}(1; 3)$ vektort, és leolvassuk a végpont koordinátáit: $A'(1; 1)$.

D' -ből felmérjük a $\overrightarrow{DC}(4; 2)$ vektort, és leolvassuk a végpont koordinátáit: $C'(4; 0)$.

A' -ből felmérjük a $\overrightarrow{DC}(4; 2)$ vektort, és leolvassuk a végpont koordinátáit: $B'(5; 3)$.

És még három másik megoldást is találunk!



Az előbbi példában többször előfordult, hogy a vektort egy adott pontból kell felmérni, és a végpont koordinátáit keressük. Például:

$$\begin{array}{ccc} D'(0; -2) & D'(0; -2) & A'(1; 1) \\ \overrightarrow{DA}(1; 3) & \overrightarrow{DC}(4; 2) & \overrightarrow{DC}(4; 2) \\ \hline A'(1; 1) & C'(4; 0) & B'(5; 3) \end{array}$$

Korábban már volt szó arról, hogy a vektor koordinátáit úgy kapjuk, hogy a végpont koordinátáiból kivonjuk a kezdőpont koordinátáit.

Ha adott egy vektor és a kezdőpontja, akkor a végpontjának koordinátáit úgy kapjuk, hogy összeadjuk a vektor és a kezdőpont megfelelő koordinátáit.

$$A(a_1; a_2), \overrightarrow{AB}(x; y) \Rightarrow B(a_1 + x; a_2 + y)$$

$$\begin{array}{l} A(a_1; a_2) \\ \overrightarrow{AB}(x; y) \\ \hline B(a_1 + x; a_2 + y) \end{array}$$

Mintapélda₁₀

Adott a koordináta-rendszerben egy négyszög, amelynek csúcsai: $A(1; 5)$, $B(7; 1)$, $C(7; 5)$, $D(4; 7)$.

- Bizonyítsuk be, hogy a négyszög trapéz!
- Döntsük el, hogy szimmetrikus-e a trapéz vagy nem? Döntésünket igazoljuk számítással!
- Határozzuk meg a négyszög területét!

Megoldás:

- Megvizsgáljuk az oldalvektorokat. Amennyiben két vektor párhuzamos, akkor egymás számszorosai, vagyis a megfelelő koordináták hányadosa egyenlő.

Emlékeztető:

$$k \cdot \mathbf{a} (a_1, a_2) \Rightarrow (k \cdot a_1, k \cdot a_2)$$

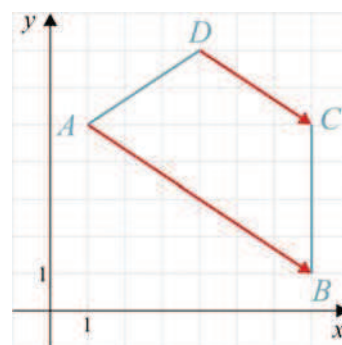
Az ábra alapján a szóba jöhető két vektor \overrightarrow{AB} és \overrightarrow{DC} , koordinátáik:

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2) = (6; -4), \text{ valamint}$$

$$\overrightarrow{DC} = (c_1 - d_1; c_2 - d_2) = (3; -2).$$

$$\frac{6}{3} = 2 \text{ és } \frac{-4}{-2} = 2, \text{ vagyis } \overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{DC}, \text{ tehát van két}$$

párhuzamos oldal, a négyszög trapéz.

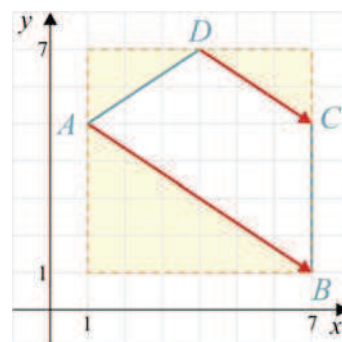


- A trapéz csak akkor lehet szimmetrikus, ha szárainak hossza egyenlő, ezért kiszámítjuk az AD és BC távolságokat:










$$AD = \sqrt{(d_1 - a_1)^2 + (d_2 - a_2)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \text{ egység és } BC = 4 \text{ egység, a szárak hossza nem egyenlő, a trapéz nem szimmetrikus.}$$

- A terület kiszámításához segítségül hívjuk a négyzettrácsot: téglalap alakú keretbe foglaljuk a négyszöget, és a téglalap területéből kivonjuk a derékszögű háromszögek területét.

$$T = 6^2 - \left(2 \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{4 \cdot 6}{2} \right) = 18 \text{ egység.}$$

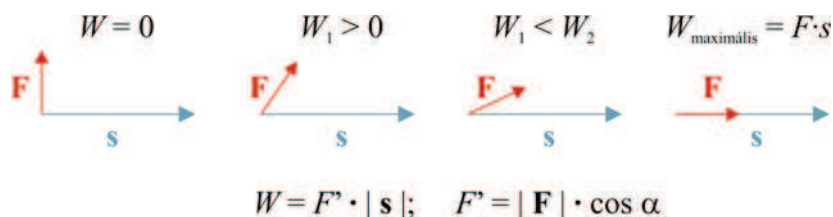


Feladatok

-  **13.** Egy paralelogramma három csúcsának koordinátái:
- a) $A(-3; -2)$, $B(4; 0)$, $C(6; 3)$; b) $A(-1; 6)$, $B(7; 2)$, $C(3; -2)$;
c) $A(5; -4)$, $B(-1; 4)$, $C(2; 8)$; d) $A(0; -5)$, $B(0; 3)$, $C(2; 0)$.
- Határozd meg a paralelogramma negyedik csúcsának koordinátáit!
-  **14.** Egy paralelogramma három csúcsának koordinátái: $(3; 1)$, $(2; 4)$ és $(-2; 1)$. Határozd meg a negyedik csúcs koordinátáit! Figyelj a megoldások számára is!
-  **15.** Határozd meg a négyzet hiányzó csúcsainak koordinátáit, ha két szomszédos csúcsának koordinátái:
- a) $A(0; 0)$, $B(5; 0)$; b) $A(3; 0)$, $B(1; -5)$; c) $A(1; 6)$, $B(3; 0)$.
-  **16.** Egy négyzet átlóinak metszéspontja a $K(-2; 2)$ pont, egyik csúcsának koordinátái: $A(1; 2)$. Határozd meg a további csúcsok koordinátáit!
-  **17.** Egy téglalap egyik oldala háromszor olyan hosszú, mint a másik. A rövidebb oldal két végpontja: $(0; -1)$ és $(-2; 2)$. Határozd meg a téglalap további csúcsainak koordinátáit!
-  **18.** Egy négyzet átlóinak metszéspontja a $K(1; -1)$ pont, egyik oldalfelező pontja az $F(5; -3)$. Határozd meg a négyzet csúcsainak koordinátáit, területét és kerületét!
-  **19.** Egy négyzet átlóinak metszéspontja a $K(-1; 0)$ pont, egyik oldalvektora az $\mathbf{a}(-6; 2)$ vektor. Melyek a négyzet csúcsainak koordinátái?
-  **20.** Egy téglalap átlóinak metszéspontja a $K(1; 2)$ pont, és az egyik hosszabb oldalának felezőpontjába mutató vektor koordinátái: $\mathbf{a}(0,5; 1,5)$. Határozd meg a téglalap csúcsainak koordinátáit, ha egyik oldala háromszor olyan hosszú, mint a másik oldala!
-  **21.** Egy deltoid átlóinak metszéspontja a $K(2; 2)$ pont, amely a hosszabb átló egyik harmadoló pontjában található. A rövidebb átló hosszának másfélszerese a nagyobb átló hossza, és a rövidebb átló egyik végpontja az $A(0; 5)$ pont. Határozzuk meg a deltoid többi csúcsát!

III. Vektorok skaláris szorzata

A fizikában a vektormennyiségekből számokat is képezhetünk. Jellemző példa erre a munka (W). Ha egy szánkót húzunk, akkor az \mathbf{F} húzóerő gyorsításra fordított munkája annál nagyobb, minél kisebb szöget zár be a kötél a talajjal:



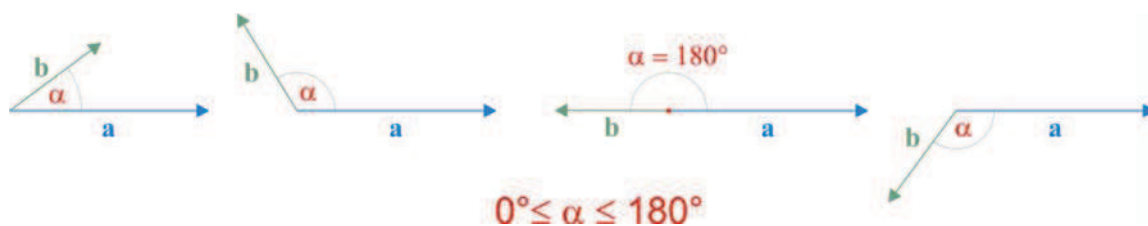
Az \mathbf{F} erő által végzett munka függ:

- az \mathbf{F} erő nagyságától (F),
- az elmozdulás nagyságától (s), valamint
- az erővektor (\mathbf{F}) és az elmozdulásvektor (\mathbf{s}) által bezárt szögtől.

A munka skalármennyiség (szám), míg az elmozdulás és az erő vektormennyiségek. A két vektormennyiségből azok skaláris szorzata adja a munkát: $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$

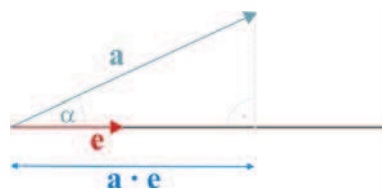
A vektorok skaláris szorzata függ a vektorok hosszától és hajlásszögüktől.

a és b vektorok skalárszorzata: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \alpha$,
 ahol α a két vektor által bezárt szög (hajlásszögük).



Így már érthető, hogy ha egy erő az elmozdulásra merőleges ($\alpha = 90^\circ$), akkor az miért nem végez munkát ($\cos \alpha = 0$). Igazolható, hogy két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor nulla, ha merőlegesek egymásra.

Ha az egyik vektor egységvektor, akkor a skaláris szorzat a másik vektornak az egységvektor egyenesére eső merőleges vetületének előjeles hosszával egyenlő.



Ha a két vektor párhuzamos, $\alpha = 0^\circ$ miatt $\cos \alpha = 1$, így a skaláris szorzat a két vektor hosszának szorzata. Egy vektor önmagával való skaláris szorzata a vektor hosszának a **négyzetével** egyenlő: $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot 1 = |\mathbf{a}|^2$, ahonnan $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2}$.

A vektorok skaláris szorzásának néhány tulajdonságát feladatokban is gyakran alkalmazzuk: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (kommutativitás) és $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ (disztributivitás).

A skaláris szorzat kifejezhető a vektorkoordinátákkal is:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \alpha = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2.$$

Két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha a skaláris szorzatuk értéke nulla: $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 0$.

A koordináta-rendszer bázisvektoraira érvényes összefüggések: $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = 1$, és $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$.

Mintapélda₁₁

Határozzuk meg az $\mathbf{a}(-1; 5)$ és a $\mathbf{b}(6; 3)$ vektorok skaláris szorzatát és hajlásszögét!

Megoldás:

A koordinátákból: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-1) \cdot 6 + 5 \cdot 3 = 9$.

A hajlásszög meghatározásához kiszámítjuk a vektorok hosszát: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{26}$

és $|\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{45}$. A hajlásszöget kifejezzük a skaláris szorzatból:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{9}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{45}}, \text{ ahonnan a hajlásszög } 74,7^\circ.$$

Megjegyzés: A hajlásszög a skaláris szorzat alkalmazása nélkül is meghatározható, szögfüggvények és a négyzetrács segítségével.

Feladatok



22. Határozd meg a következő vektorok skaláris szorzatát!

- a) A vektorok hossza 6, illetve 7 egység, közbezárt szögük 60° .
- b) A vektorok hossza 4, illetve 10 egység, közbezárt szögük 120° .
- c) $\mathbf{a}(5; 3)$ és $\mathbf{b}(-2; 7)$.
- d) $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ és $\mathbf{b} = -9\mathbf{j} + 4\mathbf{i}$.
- e) $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$ és $\mathbf{b} = -4\mathbf{i} + \mathbf{j}$.



23. Az ABC szabályos háromszög oldala 6 cm. F -fel jelöljük a BC oldal felezőpontját. Határozd meg az alábbi skaláris szorzatok értékét:

- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BF}$; d) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BF}$.



24. Az $ABCD$ négyzet oldala 5 egység hosszú. A BC oldal felezőpontját F jelöli és a BF szakasz felezőpontját P . A négyzet középpontja K . Határozd meg az alábbi skaláris szorzatok értékét:

- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$; c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$; d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$;
- e) $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AB}$; f) $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AF}$; g) $\overrightarrow{KP} \cdot \overrightarrow{KF}$.



25. Határozd meg az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektor hajlásszögét, ha

- a) $\mathbf{a}(12; 4)$ és $\mathbf{b}(4; 12)$; b) $\mathbf{a}(4, 5)$ és $\mathbf{b}(-8; -10)$;
- c) $\mathbf{a}(2; 5)$ és $\mathbf{b}(6; -4)$; d) $\mathbf{a}(-8; 3)$ és $\mathbf{b}(-3; -5)$.



26. Válaszd ki, hogy mely vektorok és hajlásszögek nem tartoznak össze!





- a) $\mathbf{a}(2; 3)$, $\mathbf{b}(-3, 8)$, $68,2^\circ$; b) $\mathbf{a}(-4, 5)$, $\mathbf{b}(-6, 3)$, $77,9^\circ$;
- c) $\mathbf{a}(-7; -2)$, $\mathbf{b}(8; 3)$, $175,4^\circ$; d) $\mathbf{a}(2; 5)$, $\mathbf{b}(-7; -5)$, 153° .



27. Egészítsd ki a mondatokat:

Ha két vektor skaláris szorzata negatív, a két vektor hajlásszöge

A skaláris szorzat abszolútértéke legfeljebb ...

-  **28.** Határozd meg y értékét úgy, hogy a $(3; 8)$ és a $(-2; y)$ vektorok merőlegesek legyenek egymásra!
-  **29.** Határozd meg az ABC háromszög szögeit, ha $A(-3; 2)$, $B(4; 4)$, $C(1; -3)$.
-  **30.** Határozd meg az $ABCD$ négyszög szögeit, ha $A(-2; 4)$, $B(2; 2)$, $C(-1; -3)$, $D(-4; 0)$.
-  **31.** A skaláris szorzat definíciója alapján dönts el, hogy a skaláris szorzás kommutatív, illetve asszociatív művelet-e?

IV. Osztópontok, súlypont koordinátái

Felezőpont koordinátái

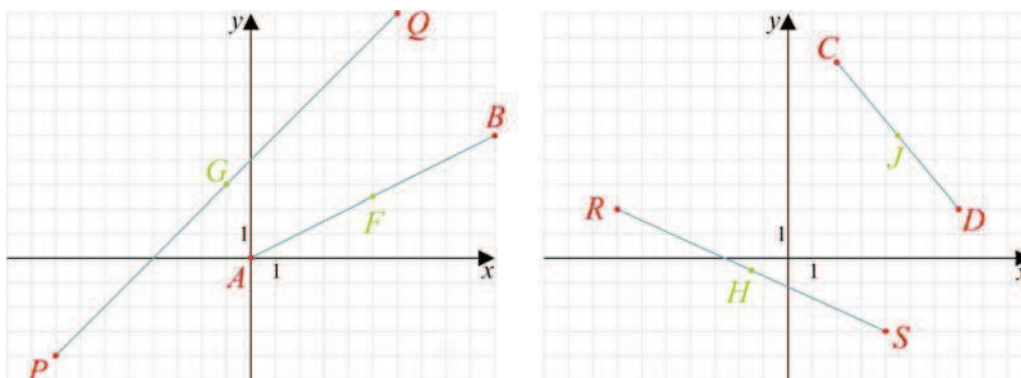
Mintapélda₁₂

a) Olvassuk le a végpontjaikkal megadott szakaszok felezőpontjának koordinátáit a szakaszok felrajzolása után! Ha kell, szerkesszük meg a felezőpontot!

$A(0; 0), B(10; 5); \quad P(-8; -4), Q(6; 10); \quad R(-7; 2), S(4; -3); \quad C(2; 8), D(7; 2).$

b) Fogalmazzunk meg szabályt, amelyik a felezőpont koordinátái és a szakasz végpontjainak koordinátái közötti kapcsolatot írja le!

Megoldás:



A felezőpontok rendre: $F(5; 2,5); G(-1; 3); H(-1,5; -0,5); J(4,5; 5).$

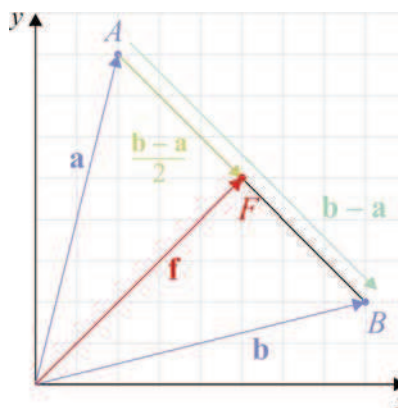
Adottak a szakasz két végpontjának koordinátái. Ekkor a felezőpont koordinátáit úgy kapjuk, hogy a végpontok megfelelő koordinátáinak összegét 2-vel osztjuk.

Megjegyzés: A felezőpont koordinátái a végpontok megfelelő koordinátáinak számtani közepe.









Az F felezőpont koordinátái megegyeznek a hozzá vezető \mathbf{f} helyvektor koordinátáival. Így F meghatározásához elegendő a szakasz végpontjaiba mutató \mathbf{a} és \mathbf{b} helyvektorokkal kifejezni az \mathbf{f} vektort.

Az ábráról leolvasható, hogy $\mathbf{f} = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{2} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}.$

$$A(a_1; a_2), B(b_1; b_2) \Rightarrow F\left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$$



Feladatok

-  **32.** Az A pontba mutató helyvektor \mathbf{a} , \mathbf{b} pedig a B pontba mutató helyvektor. Határozd meg az AB szakasz felezőpontjába mutató \mathbf{f} helyvektor koordinátáit!
- a) $\mathbf{a}(5; 1)$, $\mathbf{b}(3; 9)$; b) $\mathbf{a}(-3; 1)$, $\mathbf{b}(3; -5)$;
c) $\mathbf{a}(-6; -3)$, $\mathbf{b}(5; -3)$; d) $\mathbf{a}(5; -7)$, $\mathbf{b}(-9; -2)$.
-  **33.** Egy szakasz felezőpontja F , egyik végpontja az A pont. Határozd meg a szakasz másik végpontját, ha
- a) $F(-0,5; 0,5)$ és $A(2; 4)$; b) $A(-6; 1)$ és $F(4; 1)$;
c) $A(-2; 4)$ és $F(1; 1)$; d) $A(-3; -1)$ és $F(1; 1)$.
-  **34.** Adottak egy háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-6; -3)$, $B(4; 1)$, $C(0; 5)$. Határozd meg a középvonalak háromszögének csúcspontjait!
-  **35.** Adottak egy háromszög oldalfelező pontjai: $P(-6; -3)$, $Q(4; 1)$, $R(0; 5)$. Határozd meg a háromszög csúcsainak koordinátáit!
-  **36.** Adott az AB szakasz két végpontja: $A(0; -2)$ és $B(3; 2)$. A szakaszt meghosszabbítjuk mindkét irányban a saját hosszával. Mik lesznek az így nyert szakasz végpontjainak koordinátái?
-  **37.** Adott hat pont, amelyek egy háromszög csúcsai és oldalfelező pontjai. Döntsd el ábrázolás nélkül, hogy melyek a csúcspontok. A koordináták: $(0; 2)$, $(1; -1)$, $(-3; 4)$, $(-1; -2)$, $(3; 0)$ és $(-2; 1)$.
-  **38.** Határozd meg a középvonalak (vagyis a szemközti oldalak felezőpontjait összekötő szakaszok) vektorait, ha a négyszög csúcsai: $A(-1; 3)$, $B(6; -1)$, $C(4; -5)$, $D(-3; -4)$!
-  **39.** Egy paralelogramma szomszédos csúcsai: $A(-2; 4)$ és $B(6; 6)$, átlóinak metszéspontja: $K(1; 2)$. Határozd meg a paralelogramma másik két csúcsát!

40. Az ABC háromszöget kétszeresére nagyítottuk egy K pontból. A csúcsok koordinátái: $A(1; 4)$, $B(-3; 2)$, $C(-2; -2)$. A B csúcs képe: $B'(0; 0)$. Határozd meg a képháromszög másik két csúcsának koordinátáit!

41. Határozd meg a négyzet hiányzó csúcsait, ha két szemközti csúcsának koordinátái:
 a) $(0; 0)$, $(6; 0)$; b) $(3; 1)$, $(1; -5)$; c) $(1; 6)$, $(3; 0)$.

Osztópontok koordinátái

A szakasz felezőpontjának meghatározásakor a felezőpontba mutató helyvektort fejeztük ki a végpontokba mutató helyvektorok segítségével. Ezt a módszert a szakasz bármely osztópontjának felírásakor követhetjük. Vizsgáljuk meg harmadolópontok esetén, hogyan alakulnak az összefüggések!

Mintapélda₁₃

A szakasz A végpontjába mutató helyvektor \mathbf{a} , B végpontjába mutató helyvektor \mathbf{b} . Írjuk fel a harmadolópontokba mutató helyvektorokat az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorokkal!

Megoldás:

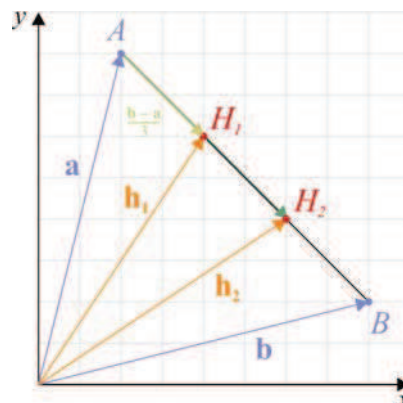
Jelölje \mathbf{h}_1 az A -hoz közelebbi, \mathbf{h}_2 a másik harmadolópontba mutató helyvektort!

A \mathbf{h}_1 felírható két vektor összegeként:

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{3} = \frac{3\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{a}}{3} = \frac{2\mathbf{a} + \mathbf{b}}{3}.$$

Hasonlóan a \mathbf{h}_2 helyvektorra:

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{b} + 2 \cdot \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{3} = \frac{3\mathbf{b} + 2\mathbf{b} - 2\mathbf{a}}{3} = \frac{\mathbf{a} + 2\mathbf{b}}{3}$$



Az A és B végpontú szakaszok harmadoló pontjainak koordinátái:

$$A(a_1; a_2), B(b_1; b_2) \Rightarrow H_1\left(\frac{2a_1 + b_1}{3}, \frac{2a_2 + b_2}{3}\right) \text{ és } H_2\left(\frac{a_1 + 2b_1}{3}, \frac{a_2 + 2b_2}{3}\right).$$

Megjegyzés: 1. A harmadolópontok meghatározásával analóg módon a szakaszt bármely arányban osztó pont koordinátái meghatározhatók.

2. A harmadolópont koordinátáit a szakasz végpontjaiba mutató helyvektorok súlyozott számtani közepeként kapjuk meg.

A háromszög súlypontjának koordinátái





A síkidomok, így a háromszög súlypontjának meghatározása tervezői szempontból fontos statikai feladat. A fizikában és kapcsolódó tudományaiban (például a térinformatikában) a testeket általában a súlypontjukkal helyettesítik. A koordinátageometriában egyszerű összefüggést találunk a háromszög csúcsainak és súlypontjának koordinátái között.




A háromszög súlypontjának koordinátái a csúcsok megfelelő koordinátáinak számtani közepei.

$$A(a_1; a_2), B(b_1; b_2), C(c_1; c_2) \Rightarrow S\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$$

Megjegyzés: Az összefüggés levezetésének egyik módszere a súlypontba mutató helyvektor felírása a csúcsokba mutató helyvektorok segítségével. Egy másik módszer a súlyvonal ismeretlen végpontját a felezőpont képletével írja fel, és azt használja ki, hogy a súlypont a súlyvonal csúcshoz közelebbi harmadoló pontja. A levezetés az emelt szintű érettségi anyaga, ezért ezen a helyen nem foglalkozunk vele.

Feladatok

-  **42.** Határozd meg a következő, A és B végpontjaikkal megadott szakaszok harmadoló pontjait!
- a) $A(-4; -1), B(5; 2)$; b) $A(-3; 3), B(3, -1)$
-  **43.** Határozd meg a szakasz ismeretlen végpontjának koordinátáit, ha egyik végpontja A és egyik harmadoló pontja H !
- a) $A(4; 0), H(1; 1)$; b) $A(6; -2), H(3; 0)$.
-  **44.** Határozd meg a szakasz összes negyedelő pontját, ha végpontjai $A(0; -1)$ és $B(3; 5)$!
-  **45.** Határozd meg az ABC háromszög súlypontjának koordinátáit! A megoldást szerkesztéssel ellenőrizd!
- a) $A(-5; 2), B(5; 8), C(9; -4)$; b) $A(-2; -2), B(-2; 3), C(5; 3)$.

-  **46.** Forgasd el az ABC háromszöget a súlypontja körül 90° -kal, az óramutató járásával ellentétes irányba! Melyek az új háromszög csúcsainak koordinátái, ha az eredeti háromszög csúcsainak koordinátái: $A(7; 2)$, $B(-3; -3)$, $C(5; 4)$?
-  **47.** Adott egy háromszög két csúcsa és súlypontja. Határozd meg a harmadik csúcs koordinátáit!
- a) $A(5; -7)$, $B(2; 4)$, $S(4; -2)$; b) $A(5; 6)$, $B(1; -4)$, $S(-2; 3)$.
-  **48.** Adottak az ABC háromszög csúcsai: $A(0; 5)$, $B(7; 2)$, $C(-5; -3)$. Határozd meg az A csúcsból induló súlyvonal hosszát!

Kislexikon

Lineáris kombináció: Ha a koordináta-rendszerben egy vektort az \mathbf{i} és a \mathbf{j} egységvektorok segítségével bontunk fel, akkor megkapjuk a vektor **lineáris kombinációját**, a $\mathbf{v} = v_1 \cdot \mathbf{i} + v_2 \cdot \mathbf{j}$ alakú felírást. v_1 és v_2 számokat, vagyis \mathbf{i} és \mathbf{j} vektorok szorzóit a \mathbf{v} vektor koordinátáinak nevezzük: $\mathbf{v} (v_1; v_2)$.

Vektor koordinátái: Ha adott a vektor kezdőpontja $A (a_1; a_2)$ és végpontja $B (b_1; b_2)$, akkor az A kezdőpontból a B végpontba mutató **vektor** koordinátáit úgy kapjuk, hogy a végpont koordinátáiból kivonjuk a kezdőpont megfelelő koordinátáit.

$$A (a_1; a_2), B (b_1; b_2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$$

Két pont távolsága: A kezdőpontjával és végpontjával megadott vektor hosszát a megfelelő koordináták különbségéből számítjuk ki ugyanúgy, mint a **két pont távolságát**:

$$A (a_1; a_2), B (b_1; b_2) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Vektor hossza: A koordinátaival megadott **vektor hosszát** a koordináták négyzetösszegének négyzetgyöke adja:

$$\mathbf{a} (a_1; a_2) \Rightarrow |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Két vektor összeadásakor a megfelelő koordináták összeadódnak.

$$\mathbf{a} (a_1; a_2), \mathbf{b} (b_1; b_2) \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$$

Két vektor kivonásakor a megfelelő koordinátákat kivonjuk egymásból.

$$\mathbf{a} (a_1; a_2), \mathbf{b} (b_1; b_2) \Rightarrow \mathbf{a} - \mathbf{b} (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$$

Vektor szorzása számmal: Ha egy vektort megszorozunk egy k számmal, akkor a vektor koordinátái is k -val szorzódnak.

$$\mathbf{a} (a_1; a_2), k \in \mathbf{R} \Rightarrow k \cdot \mathbf{a} (k \cdot a_1; k \cdot a_2)$$

Vektor elforgatása 90°-kal: Ha egy vektort 90°-kal elforgatunk, akkor a koordinátái felcserélődnek, és az egyik

(de csak az egyik!) előjelet vált.

$$\mathbf{a}(a_1; a_2) \xrightarrow{90^\circ} (a_2; -a_1) \text{ és } (-a_2; a_1)$$

+90°-os forgatásnál $(-a_2; a_1)$, -90°-os forgatásnál $(a_2; -a_1)$ vektort kapunk.

Vektor végpontjának koordinátái: Ha adott a vektor és a kezdőpontja, akkor a **végpont koordinátáit** úgy kapjuk, hogy összeadjuk a vektor és a kezdőpont megfelelő koordinátáit.

$$A(a_1; a_2), \overrightarrow{AB}(x; y) \Rightarrow B(a_1 + x; a_2 + y)$$

$$\begin{array}{r} A(a_1; a_2) \\ \overrightarrow{AB}(x; y) \\ \hline B(a_1 + x; a_2 + y) \end{array}$$

Vektorok skaláris szorzata: Az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok skalárszorzata: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \alpha$, ahol α a két vektor által bezárt szög (hajlásszögük).

Egy vektor önmagával való skaláris szorzata a vektor hosszának a **négyzetével** egyenlő:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2}.$$

A vektorok skaláris szorzásának művelete kommutatív művelet: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, és teljesül a disztributivitás: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

A koordináta-rendszer bázisvektoraira érvényes összefüggések: $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = 1$, és $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$.

Vektorok skaláris szorzata vektorkoordinátákkal kifejezve: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \alpha = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2.$$

Két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha a skaláris szorzat értéke nulla:

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 0.$$

Felezőpont koordinátái: Adott a szakasz két végpontja. Ekkor a **felezőpont koordinátáit** úgy kapjuk, hogy a végpontok megfelelő koordinátáinak összegét 2-vel osztjuk.

$$A(a_1; a_2), B(b_1; b_2) \Rightarrow F\left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$$

Harmadolópont koordinátái: Az A és B végpontú szakaszok **harmadolópontjainak** koordinátái:

$$A(a_1; a_2), B(b_1; b_2) \Rightarrow H_1\left(\frac{2a_1+b_1}{3}; \frac{2a_2+b_2}{3}\right) \text{ és } H_2\left(\frac{a_1+2b_1}{3}; \frac{a_2+2b_2}{3}\right).$$

Súlypont koordinátái: A **háromszög súlypontjának** koordinátái a csúcsok megfelelő koordinátáinak számtani közepei.

$$A(a_1; a_2), B(b_1; b_2), C(c_1; c_2) \Rightarrow S\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}; \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$$

